

Gestion des risques financiers en Afrique subsaharienne

Mémoire d'actuariat présenté pour l'obtention du

Master droit, économie et gestion
Mention actuariat

Et l'admission à l'**Institut des Actuaire**

Mémoire soutenu le 28 juin 2017 par

M. Viou Alain AÏNOU

Caractère confidentiel : Non

Jury :

Président : Michel FROMENTEAU

Membres : Aymric KAMEGA, tuteur du mémoire

Nathanael ABECERA

Gwenaël BILLIOTTE

Laurence ESLOUS

Pierre PETAUTON

Vincent RUOL

François WEISS

Remerciements

Mes premiers mots vont à l'endroit de mon tuteur, Aymric KAMEGA. Qu'il trouve ici le témoignage de toute ma reconnaissance pour sa disponibilité. Je lui suis gré des discussions menées sur des sujets divers et variés qui semblent suivre des cours inattendus mais passionnants.

Je remercie le corps professoral et administratif de la chaire d'actuariat du Conservatoire National des Arts et Métiers. Merci aux membres du jury, dont je remercie particulièrement Monsieur Michel Fromenteau qui a su me transmettre sa passion de formules parfois indigestes. Qu'il retrouve ici l'expression de mon admiration pour sa connaissance unique et extrêmement enrichissante de la chose actuarielle.

Je n'oublie pas toutes les personnes qui ont jalonné mon parcours à la fois académique et professionnel mais également humain. Une pensée à mes compagnons de route, où qu'ils soient.

Enfin, que mes parents se voient récompensés des nombreux efforts louables consentis
E nan tchè noumi trala.

Un clin d'oeil à M-A-E et *Sèhou* pour leur présence et leur bonne humeur contagieusement ravageuse et ô combien bienfaitrice.

*À Pamphile,
À M-A-E,
À Sèhou.*

Table des matières

Calendrier	9
Résumé	10
Abstract	11
Liste des abréviations	13
Introduction générale	14
1 Présentation et réglementation des marchés des capitaux	16
1.1 Introduction	17
1.2 Présentation des marchés des capitaux	17
1.2.1 Marché obligataire	18
1.2.1.1 Marché de la dette locale	18
1.2.1.2 Marché des "Eurobonds"	20
1.2.1.3 Marché des obligations vertes	20
1.2.2 Marché du Capital-Investissement	22
1.2.3 Marché Actions	24
1.3 Réglementation des marchés des capitaux	27
1.3.1 Cadre juridique	28
1.3.2 Cadre opérationnel	29
1.3.2.1 'The Financial Services Board' (FSB) en Afrique du Sud	29
1.3.2.2 'The Securities and Exchange Commission' (SEC) au Nigéria	30
1.4 Réglementation prudentielle	31
1.4.1 Solvency Assessment and Management en Afrique du Sud	31
1.4.2 Solvabilité II au Nigéria	34
1.5 Conclusion	34
2 Approche de modélisation des indices financiers	36
2.1 Introduction	37
2.2 Approches standards de modélisation	38
2.2.1 Modèle dit de 'marche aléatoire'	38
2.2.1.1 Théorie de la marche aléatoire	38
2.2.1.2 Test de normalité et fonction d'auto-corrélation	39
2.2.2 Modèles ARCH et GARCH	41
2.2.3 Modèle E-GARCH	43
2.3 Quid de l'efficience des marchés financiers africains subsahariens ?	44
2.4 Nouvelle approche de modélisation : processus à changement d'états	45
2.4.1 Contexte	45

2.4.2	Rappel sur les chaînes de Markov à nombre fini d'états	46
2.4.3	Méthode d'estimation des paramètres d'un processus à changement d'états log-normal	47
2.4.4	Une propriété intéressante et utile des processus à changement de régimes	52
2.5	Sélection de modèles	55
2.5.1	Critère d'Information d'Akaike	55
2.5.2	Critère d'Information de Bayes	55
2.6	Conclusion	56
3	Évaluation du risque d'illiquidité : cas des marchés africains subsahariens	57
3.1	Introduction	58
3.2	Modélisation de la prime de décote d'illiquidité	59
3.2.1	Approche de Longstaff, 1995	60
3.2.1.1	Modélisation de l'option de vente	61
3.2.1.2	Application numérique	62
3.2.2	Approche de Ghaidarov, 2014	62
3.2.2.1	Modélisation de l'option de vente	63
3.2.2.2	Application numérique	65
3.3	Une Extension de la modélisation de la prime d'illiquidité	67
3.3.1	Choix d'une mesure d'évaluation	67
3.3.2	Modélisation et évaluation de l'option de vente	67
3.3.3	Application numérique	68
3.4	Conclusion	69
4	Mesures de risque et exigence en capital dans le contexte africain subsaharien	70
4.1	Introduction	71
4.2	Définition et formalisation d'une mesure de risque	71
4.2.1	Définition d'une mesure de risque	71
4.2.2	Formalisation d'une mesure de risque	71
4.2.2.1	La Value at Risk (VaR)	72
4.2.2.2	La Conditional Tail Expectation (CTE)	72
4.3	Approche simulateur	73
4.3.1	Détermination de la VaR	73
4.3.2	Détermination de la CTE	73
4.4	Calculs exacts : exemple d'un contrat de type GMMB	73
4.4.1	Définition d'un contrat d'assurance	74
4.4.2	Définition d'un contrat d'assurance de type GMMB	74
4.4.3	Détermination de la VaR	74
4.4.4	Détermination de la CTE	75
4.4.5	Illustration et résultats	76
4.5	Conclusion	77
	Conclusion générale	78
	Appendices	81
	A Preuve de la formule fermée de Longstaff, 1995,	82
	B Preuve de la formule fermée de Ghaidarov, 2014,	85

TABLE DES MATIÈRES

C Preuve de la formule fermée de l'extension de Ghaidarov,	86
D Preuve des formules fermées de CTE	87

Calendrier

Le calendrier ayant jalonné la rédaction de ce mémoire a été le suivant :

- Chapitre 1 - Présentation et aspect réglementaire : Décembre 2015
- Chapitre 2 - Approche de modélisation des indices financiers : Février 2016
- Chapitre 3 - Évaluation du risque d'illiquidité : cas des marchés africains subsahariens : Mai 2016
- Chapitre 4 - Mesures de risques et exigence en capital : Juillet 2016
- Communication d'une première version consolidée : 1er Août 2016
- Retour de Monsieur Fromenteau : 29 Mars 2017
- Prise en compte des remarques et communication d'une version définitive : 5 Mai 2017.
- Soutenance : 28 Juin 2017

Résumé

L'objectif principal de cette thèse, est de proposer une étude approfondie des deux principaux marchés de capitaux en Afrique subsaharienne, l'Afrique du Sud et le Nigéria qui concentrent à eux seuls plus de 360 milliards de dollars du marché existant. Le continent africain s'impose désormais, aux dires des experts, comme le marché sur lequel les attentions seront portées du fait de son potentiel de développement économique conjugué aux perspectives démographiques. Au regard de cela, et de notre intérêt particulier pour ce continent, il apparaît naturel de destiner le présent mémoire au prochain centre du monde.

La présente étude traite des aspects financiers, quantitatifs et actuariels. Ainsi, de prime abord, nous proposons un aperçu des marchés de capitaux dans les pays visés en détaillant certains sous-marchés clés. Ensuite, nous interrogeons la notion d'efficience des marchés concernés en considérant quelques modèles mathématiques standards. Ces derniers ont le mérite de nous éclairer sur l'évolution des rendements journaliers (dividende compris) des indices financiers. L'étude des modèles standards considérés nous a conduit à proposer l'utilisation des processus à changement de régimes nous permettant ainsi de détecter les états de la nature cachés de l'évolution des prix des indices sud-africain et nigérian.

En raison du développement des placements privés en Europe (Euro PP), nous avons mené une analyse de la notion de prime d'incessibilité. En effet, quand bien même le type de produit cité ci-dessus n'est pas encore disponible sur les marchés africains, nous sommes convaincus de son attractivité et de son apport en diversification pour de potentiels investisseurs, mais aussi de la capacité qu'elle apporte aux firmes à lever davantage de capitaux en dehors des marchés standards. De façon évidente, le prix d'un tel produit financier devrait être inférieur à celui d'une action cotée de la même entreprise. Le but est à présent d'évaluer la prime due à l'incessibilité du titre financier. En se référant aux travaux séminaux de Longstaff et Ghaidarov, nous analysons les primes dans un contexte africain et étendons la méthodologie en considérant que les rendements des indices peuvent évoluer suivant un processus à changements de régime normal.

Enfin, il est aussi important de quantifier les risques inhérents à tout assureur ou toute banque dans le cadre africain. Pour ce faire, nous considérons un contrat d'assurance vie indexé sur un support financier sud-africain et dont la fluctuation du cours est gouvernée par un processus à changement de régime log-normal. Dans cette optique, nous fournissons au lecteur des outils quantitatifs nécessaires à la détermination des mesures de risques importantes utilisées couramment dans la pratique et présentes dans les réglementations en vigueur.

Mots clés : indices financiers subsahariens, processus à changement de régimes, risque d'illiquidité, mesures de risques, exigence en capital.

Abstract

The fundamental goal foreseen through this thesis is an in-depth description of the two major African sub-Saharan capital markets. To be more precise, we focus on South African and Nigerian markets which concentrate more than 360 billions of dollars of existing capital markets. Africa is definitely presented as the future market over all the world on which everyone should have a look in the next coming years due to its economic potential and demography perspective. Given that, and in addition of our outstanding interest for this continent, it comes naturally to dedicate this thesis to the upcoming world center.

Our study deals with the financial, quantitative and actuarial concepts. We, firstly, give an overview of capital markets in selected countries by considering in details some relevant submarkets. We, next, move on studying the efficiency of given equity markets by considering standard mathematical models. Those models bring us insights of daily total return evolution over time. Given that inefficiency acknowledgement, we suggest to consider a so-called regime switching process in order to better take into account, the embedded states of equity price motions, that we identify by principal financial indexes in South-Africa and Nigeria.

Due to the development of private investments in Europe, we conduct an analysis on illiquidity premium concept. Indeed, albeit, the aforementioned type of assets are not available on Africa framework, we believe that, due to its attractiveness and source of diversification for potential investors, private placements should allow firms in Africa to raise additional capital over the financial regular market. Obviously, the premium of this type of assets should minor the quoted stock price of the same firm. The goal pursued therefore is to assess the discounting price. Following two seminal approaches, thanks to Longstaff and Ghaidarov, we analyze the premium in African framework and extend the pricing methodology by suggesting a regime switching log-normal driven process for the indexes prices.

To be in line with the title of this document, it is also important to illustrate how to quantify inherent risks for insurers or banks in context of Africa. To illustrate risk measures computations, we consider a life insurance contract which is linked to financial South-African market, driven itself by a regime switching process. In this respect, we manage to give to lecturer, quantitative tools necessary to achieve and determine relevant risk measures considered as of high-quality common regulatory and supervisory standards and practices.

Keywords : sub-Saharan financial indexes, regime switching process, illiquidity risk, risk measures.

Liste des abréviations

ASEA	African Stock Exchanges Association
BAD	Banque Africaine de Développement
BVAL	Bloomberg Valuation Services
CCNUCC	Convention Cadre des Nations Unies sur les Changements Climatiques
EMPEA	Emerging Markets Private Equity Association
FANAF	Fédération des Sociétés d'Assurances de droit National Africain
FMI	Fonds Monétaire International
FODA	Fonds Obligataire Domestique Africain
FSB	Financial Services Board
IMFA	Initiative des Marchés Financiers Africains
JSE	Johannesburg Stock Exchange
JSE-ALSH	Johannesburg Stock Exchanges All-Share
NGSE	Nigeria Stock Exchange
OCDE	Organisation de Coopération et de Développement Economique
OHADA	Organisation pour l'Harmonisation en Afrique du Droit des Affaires
SEC	Security Exchanges Commission
UMOA	Union Monétaire Ouest Africaine.

Introduction générale

L'essor des marchés financiers apparaît comme un facteur de développement d'un pays, voire d'une sous-région. La dernière décennie a permis l'émergence et la stabilisation de plusieurs places boursières en Afrique. L'intérêt des investisseurs en direction du continent est croissant, même si un ralentissement s'est opéré depuis la crise financière mondiale de 2008. Aujourd'hui la crise semble s'essouffler dans les pays développés, ce qui peut présager d'une reprise accentuée des activités de marché des bourses africaines.

A l'amorçage de cette reprise, nous essayons d'apporter aux investisseurs, des éléments d'appréciation de ces marchés. Nous proposerons ainsi, en prélude, une présentation des marchés, en insistant sur leur positionnement en matière de capitalisation boursière. Nous ferons ensuite une revue des différents marchés de capitaux de la région, puis un panorama des réglementations, à la fois financière et assurantielle sera proposé. Ce travail de présentation sera suivi d'une phase de modélisation mathématique, de quantification de l'illiquidité des marchés financiers ciblés et de détermination de mesures de risques et besoins en capital. Ce dernier point sera illustré sur la base d'un contrat d'assurance à garantie plancher.

Nous consacrons le premier chapitre de ce mémoire à la présentation et à l'aspect réglementaire de la plupart des marchés boursiers africains subsahariens. Nous détaillerons davantage les places financières ainsi que les produits financiers qu'on y retrouve. Quelques données quantitatives permettront de donner un aperçu du développement de ces marchés et produits financiers et éclaira sur la dynamique actuelle des différents places financières notamment nigérienne et sud africaine. En effet, à eux deux ils concentrent près des trois quarts de la capitalisation boursière du continent. Les principaux indices qui seront considérés seront présentés. D'autre part, d'un point de vue réglementaire, nous aborderons à les aspects financiers et assurantiels. Nous parlerons ainsi de l'adaptation faite par l'Afrique du Sud de la réglementation européenne Solvabilité II qui a abouti à *Solvency Assessment and Management*. Du côté du Nigéria, nous exposons son intention de se conformer intégralement à la directive en vigueur depuis le 1er janvier 2016 dans l'Union Européenne.

Ce travail traitera dans le second chapitre, des marchés financiers sud-africain et nigérien. En effet, ces deux marchés sont les plus importants dans la zone Afrique subsaharienne. Pour cela nous aborderons tout d'abord la question de leur efficience dans le sillage de [Mecagni and Sourial \[1999\]](#), [Appiah-Kusi and Menyah \[2003\]](#) ou encore [Magnusson and Wydick \[2000\]](#), [Smith and Jefferis \[2005\]](#) et [Lim \[2007\]](#). L'hypothèse d'efficience, comme définit par [Fama \[1970\]](#), est le postulat selon lequel les prix des actifs intègrent entièrement toute l'information disponible. [Alagidede and Panagiotidis \[2009\]](#) ont vérifié les hypothèses d'efficience en utilisant les modèles de type GARCH. Ils ont considéré plusieurs marchés financiers africains et ont effectué des tests sur des données disponibles jusqu'en 2006. Cette analyse permettra de mieux saisir l'impact de la crise économique de manière empirique. Les modèles de type GARCH, sont facilement utilisables mais ne suffisent pas à prendre en compte l'épaisseur des queues de distribution à gauche. Pour cela, nous proposerons l'utilisation de modèles à changement de régimes dans la modélisation

des différents indices boursiers étudiés. Ces modèles, de type markovien, supposent que les processus évoluent aléatoirement suivant plusieurs régimes. Ils devraient ainsi permettre de détecter des périodes de faible ou de forte volatilité sur les marchés et de ressortir un certain nombre de faits stylisés. A notre connaissance, cette approche n'a pas encore été étudiée dans le cadre des marchés financiers considérés. Cette modélisation, introduite par [Hamilton \[1979\]](#), considère des changements de régime de type Auto Régressif. [Hamilton and Susmel \[1994\]](#) étudièrent plusieurs types de modèles en variant le nombre de régimes et la forme du processus dans ces régimes, notamment des formes de type ARCH ou GARCH. [Bollen \[1998\]](#) utilisa une forme log-normale pour chacun des régimes. Ce sera la même approche retenue par [Hardy \[2003\]](#) pour modéliser des fonds à long terme. Elle constata que 2 régimes suffisent en général pour modéliser le comportement des indices boursiers. Nous utiliserons cette dernière approche pour les indices sud-africain et nigérian. Nous indiquons également des procédures d'estimation assez robustes et relativement stables.

Nous dédions le troisième chapitre de ce mémoire à l'évaluation de la prime de décote d'illiquidité (*Illiquidity premium en Anglais*) permettant de quantifier le risque d'illiquidité. Cette prime correspond à la différence entre la valorisation d'une entreprise cotée, dont les actifs sont liquides, et une entreprise comparable mais non cotée. L'illiquidité peut être également contractuelle par exemple pour des actions détenues par des dirigeants ou des salariés d'une entreprise. Le but de cette étude sur le risque d'illiquidité est donc de mesurer l'impact sur les prix de telles restrictions. [Longstaff \[1995\]](#), dans son article de référence, propose une approche d'assimilation de la décote d'illiquidité à la prime d'une option de vente européenne sur maximum du sous-jacent. Dans son sillage, [Ghaidarov \[2014\]](#), a quelque peu modifié la nature de l'option de vente qu'il assimile à une option de vente à départ décalé.

Dans le quatrième chapitre, nous nous intéressons au calcul de mesures de risque et exigence en capital qui seront illustrés dans le cadre d'un contrat de type *Guaranteed Minimum Maturity Benefit* (GMMB). Dans le contexte de ce contrat, relativement simple, nous étudierons les mesures de risque de type 'quantile' et 'conditional tail expectation'. L'approche *quantile* constitue le percentile à un niveau α de la distribution de pertes du payoff du contrat GMMB. Ces différentes mesures seront déterminées suivant une approche simulateur dans un premier temps, tandis que la deuxième approche consistera au calcul exact.

En somme, le premier but recherché dans ce mémoire est, de proposer d'une part, aux investisseurs des outils d'aide à la décision dans leur choix d'investissement sur le continent sans la prétention d'être exhaustif. De même, les analyses sur les risques actions que nous menons, pourraient éclairer les assureurs, dans l'optique ultérieure de se doter de générateurs de scénarios économiques. Il s'agira d'apporter, d'autre part, un regard nouveau sur l'intérêt que pourrait susciter la notion de décote d'illiquidité, pour des investissements alternatifs dans un contexte de marchés financiers africains subsahariens. Enfin, une application à l'assurance vie sera proposée via le calcul d'exigence en capital, sur la base d'un contrat d'assurance à garantie plancher.

Chapitre 1

Présentation et réglementation des marchés des capitaux

Contents

1.1	Introduction	17
1.2	Présentation des marchés des capitaux	17
1.2.1	Marché obligataire	18
1.2.1.1	Marché de la dette locale	18
1.2.1.2	Marché des "Eurobonds"	20
1.2.1.3	Marché des obligations vertes	20
1.2.2	Marché du Capital-Investissement	22
1.2.3	Marché Actions	24
1.3	Réglementation des marchés des capitaux	27
1.3.1	Cadre juridique	28
1.3.2	Cadre opérationnel	29
1.3.2.1	'The Financial Services Board' (FSB) en Afrique du Sud	29
1.3.2.2	'The Securities and Exchange Commission' (SEC) au Nigéria	30
1.4	Réglementation prudentielle	31
1.4.1	Solvency Assessment and Management en Afrique du Sud	31
1.4.2	Solvabilité II au Nigéria	34
1.5	Conclusion	34

1.1 Introduction

Nous présentons dans ce chapitre, les marchés financiers subsahariens en général, et plus particulièrement les deux plus importants que sont l’Afrique du Sud et le Nigéria. Nous faisons tout d’abord une synthèse par type de marché, puis nous abordons quelques aspects juridiques qui permettent d’éclairer le lecteur sur les garde-fous existants. Aussi seront étudiés les aspects réglementaires bancaires en vigueur. La dernière partie de ce chapitre permettra d’étudier de près le volet réglementaire dans le domaine de l’assurance dans ces pays ciblés.

1.2 Présentation des marchés des capitaux

Les marchés financiers constituent un élément déterminant de l’émergence de l’économie d’un pays, d’une région, voire d’un continent. L’environnement particulier qui prévaut en Afrique ne semble pas suffisamment mature et développé pour attirer davantage les capitaux étrangers. Les politiques nationales balbutiantes, les situations d’insécurité et plus globalement le contexte socio-économique sont autant d’éléments pouvant justifier la lenteur et le retard à l’essor de marchés financiers africains viables. Cependant, quelques chiffres permettent de croire en l’amélioration de la situation, comme le montre le graphe 1.1 tiré de Masetti [2013].

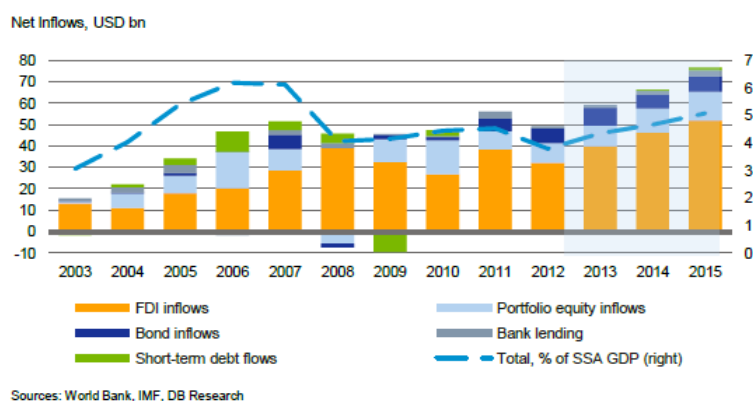


FIGURE 1.1 – Flux d’investissements extérieurs en Afrique subsaharienne

Ces marchés financiers pourraient également contribuer au développement du secteur de l’assurance, plus particulièrement celui de l’assurance-vie en Afrique. En effet, la plupart des assureurs investissent dans des titres monétaires, ce qui ne favorise pas la distribution de bénéfices tirés des placements aux assurés ou à leurs bénéficiaires.

Depuis 1989, le nombre de bourses de valeurs mobilières en Afrique est passé de cinq à dix sept de nos jours. Ce nombre est certes important, mais seulement quelques unes sont actives et bien développées. Ainsi l’Afrique du Sud concentre aujourd’hui à elle seule 60% de la capitalisation boursière sur le continent, à hauteur de 312 milliards de dollars. La deuxième plateforme la plus importante en Afrique subsaharienne est le Nigéria totalisant 40 milliards de dollars de capitalisation boursière ¹.

Un élément important à l’essor des marchés financiers réside dans les marchés obligataires, vecteurs de financement de l’économie.

1. Source : www.mfw4a.org

1.2.1 Marché obligataire

1.2.1.1 Marché de la dette locale

La demande croissante des investisseurs a amené nombre d'états africains à accroître leur endettement en monnaies locales. Le montant total d'endettement, sur la base de produits libellés en devise locale, est passé de 11 mille milliards de dollars US en 2005 à 31 mille milliards de dollars US en 2012².

Comme souligné par Mezui [2015] de la Banque Africaine de Développement (BAD), de 2005 à 2013, le volume des émissions obligataires sur le marché africain est passé de 25 à 364 milliards de dollars, avec une prépondérance pour les émissions souveraines. La cartographie des marchés obligataires réalisée par l'Initiative des Marchés Financiers Africains (IMFA) et le rapport annuel de l'*African Stock Exchanges Association* (ASEA) révèlent que 99% des échanges d'obligations souveraines concernent notamment l'Afrique du Sud. Toutefois, la zone Union Monétaire Ouest Africaine (UMOA) ne se laisse pas compter. Le graphique 1.2 montre la croissance rapide des émissions de titres publics entre 2001 et 2015, constituant l'un des points d'attention de la dernière assemblée générale de la Fédération des Sociétés d'Assurances de droit National Africain (FANAF)³. On observe clairement le ratio entre bons du trésor, obligations du trésor et obligations internationales, l'émission des Eurobonds constituant des montants importants. Les obligations du trésor représentent toutefois la grosse majorité des émissions de la région. Le dernier exemple d'émission de titres publics sur le marché local concerne le Bénin qui a lancé, en mars 2016, son troisième emprunt obligataire d'une valeur de 25 milliards de FCFA. Ce troisième bon du trésor est assorti d'une maturité moyenne de trois ans pour un taux de 5.5%. Elle arrive à échéance le 16 mars 2019. Afin de dynamiser les marchés obligataires domestiques africains, la BAD

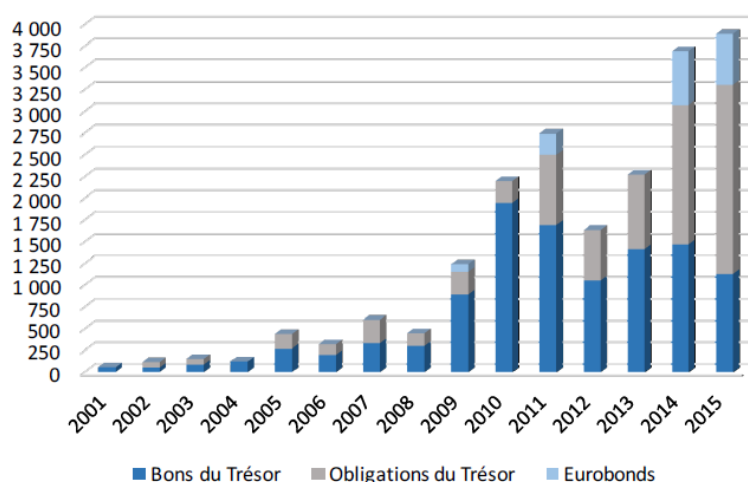


FIGURE 1.2 – Emissions de titres publics dans la zone UMOA de 2001 à 2015 (en milliards de FCFA)

a lancé en février 2008, l'IMFA. Parmi les objectifs de cette institution, on dénombre :

- permettre aux gouvernements d'améliorer les conditions auxquelles ils empruntent sur les marchés financiers domestiques, afin de réduire la dépendance aux devises étrangères. Ils peuvent s'appuyer pour cela sur le Fonds Obligataire Domestique Africain (FODA) ;

2. Source : Initiative des Marchés Financiers Africains ; <http://www.africanbondmarkets.org>

3. Assemblée générale qui s'est tenue du 15/02/2016 au 18/02/2016 à Abidjan en Cote d'Ivoire

1.2 Présentation des marchés des capitaux

- jouer un rôle de catalyseur pour le développement et la stabilité des marchés financiers ;
- accroître la transparence et le maintien des données obligataires africaines.

L'une des réalisations majeures de l'IMFA, a été la construction avec Bloomberg, de l'indice composite ABABI. Cet indice lancé en février 2015, qui comprend un indice d'obligations souveraines africaines composé des quatre obligations les plus liquides et trois sous-indices pour les différentes gammes de maturité, est pondéré par la valeur de marché des dites obligations telle que calculée par le service *Bloomberg Valuation Service* (BVAL) de Bloomberg. Outre l'Afrique du Sud, l'Egypte, le Nigéria et le Kenya, la Namibie et le Botswana, devraient en Octobre s'ajouter à la liste des pays composant l'indice ABABI. Cet indice devrait servir de référence transparente et objective et contribuer à la liquidité en offrant aux investisseurs un point de référence pour mesurer leur performance.



FIGURE 1.3 – Aperçu Bloomberg de l'indice composite ABABI au 30/09/2015

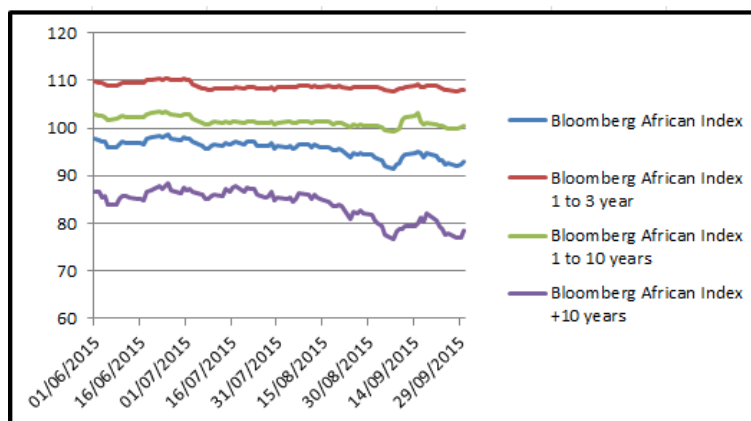


FIGURE 1.4 – Historique des prix de l'indice ABABI

1.2.1.2 Marché des "Eurobonds"

Cette classe d'obligations constitue une alternative à un financement des économies dans la région africaine. En effet, comme son nom l'indique, les "Eurobonds" sont des obligations libellées dans des monnaies différentes de celles des émetteurs. Par ce canal, les émetteurs peuvent faire appel à des investisseurs internationaux. Cette opportunité n'est rendue possible que par la mise à disposition de potentiels investisseurs, d'informations sur la qualité de crédit des émetteurs. Ainsi, comme le rapporte Masetti [2013], le nombre de pays de l'Afrique subsaharienne, notés par les plus grandes institutions telles que Moody's, Fitch ou Standard & Poor's est passé de 10 en 2003 à 21 en 2013. Toujours dans le même article, Masetti [2013] explique, qu'en dehors de l'Afrique du Sud, qui émet des obligations dans plusieurs devises, les autres pays émettent des Eurobonds en dollars US.

Toutefois, cette demande en obligations internationales émises par les pays d'Afrique subsaharienne, a ralenti au premier semestre 2015, en raison notamment des alertes du Fonds Monétaire International (FMI) sur le risque du surendettement encouru par ces pays. Ainsi, au 30 septembre 2015, le volume de ces "Eurobonds" avoisine 10,5 milliards de dollars contre près de 14,5 milliards de dollars à la même période en 2014, ce qui constitue une baisse de 25%. Cela ne semble néanmoins pas rendre ces produits inintéressants pour les investisseurs, car l'Afrique subsaharienne constitue l'une des régions du monde proposant des produits aux rendements intéressants. Comme l'indique Masetti [2015], les dernières semaines ont permis de constater un regain d'intérêts pour les "Eurobonds" émis par les pays africains subsahariens. Aussi, constate-t-il, la nécessité de ces pays d'émettre des obligations internationales s'explique par les prix historiquement bas du pétrole, réduisant de fait les recettes de ces derniers. Le graphique 1.5, extrait de Masetti [2015] présente l'évolution du marché des "Eurobonds" de certains pays africains subsahariens.

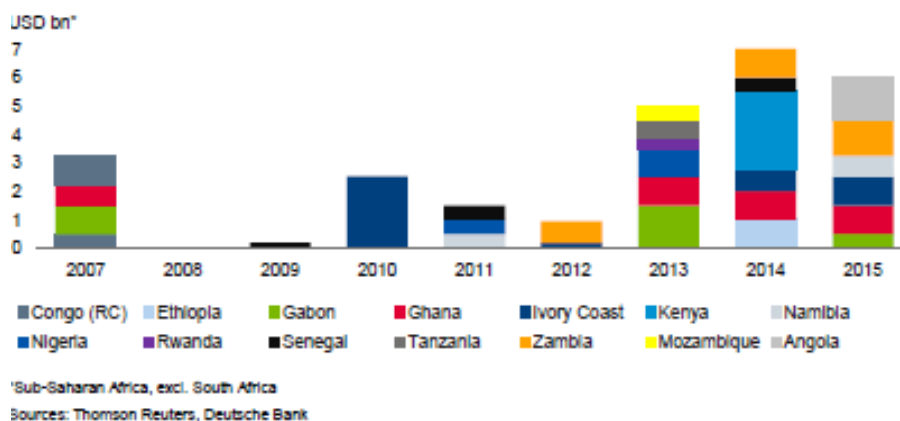


FIGURE 1.5 – Évolution du marché des "Eurobonds" en Afrique subsaharienne

Aussi note-t-on, sur les graphiques 1.2 et 1.2 que le premier Eurobond dans l'Union Monétaire Ouest Africaine a été émis en 2009.

1.2.1.3 Marché des obligations vertes

Le présent mémoire ne saurait faire fi des préoccupations actuelles, ayant mené à l'organisation en France de la COP21⁴, qui a rassemblé près de deux cent pays du monde autour de la question des changements climatiques. Cette conférence a permis de mobiliser pour l'Afrique, pas moins de 10 milliards de dollars en faveur des énergies renouvelables.

4. United Nations on Climat changes

D'autres projets portant sur les infrastructures écologiques ont été également au coeur des débats. L'ensemble de ces problématiques ont fait naître une nouvelle classe d'actifs dénommés *green bonds* ou *climate bonds* ou obligations vertes qui rentrent en ligne de compte de l'investissement socialement responsable (ISR). Il s'agit d'obligations émises par une entreprise ou une entité publique visant à financer des projets environnementaux. Ces projets devront être relatifs aux points cités précédemment à savoir les énergies renouvelables, les infrastructures écologiques ou encore l'amélioration de l'efficacité énergétique. Pour revêtir le statut de *green bonds*, une obligation doit respecter non seulement les règles érigées dans un document appelé *Green bonds principles* disponible en ligne⁵ mais aussi convenir aux règles du *Climate Bonds Initiative*. Cependant, l'efficacité des obligations vertes ne peut être aujourd'hui clairement certifiée car une telle obligation peut être détournée de ses objectifs initiaux, ce qui amène l'organisation *Climate Bond Initiative* à ne lister sur son site⁶ les obligations vertes sans pour autant certifier le label *green*. Ce constat a conduit l'organisation mondiale de protection de la nature à affirmer que : *Seule une obligation pour laquelle l'émetteur peut démontrer des objectifs environnementaux tangibles et mesurables, certifiés par un organisme indépendant devrait être considérée comme une obligation verte*. En France, Vigeo Eiris semble jouer le rôle de gendarme en donnant son avis sur l'aspect *green* des investissements. Par exemple, ce cabinet a donné son avis sur l'obligation verte émise par la Caisse des Dépôts et Consignations le 22 février 2017 à échéance 2022. Cependant, cet avis reste empreint de réserve dans la mesure où Vigeo est une filiale de la Caisse des Dépôts et qu'il est naturel de s'interroger sur l'indépendance indispensable en la matière.

Partant du postulat que les règles de l'art et les objectifs sont respectés, l'évolution du volume annuel d'obligations vertes émises est visible sur le graphique 1.6. Une forte croissance d'émissions a été notée en 2014. Le rythme est ensuite resté aussi soutenu en 2015 et 2016 et le montant cumulé d'obligations vertes atteint désormais 120 milliards de dollars US comme le démontre le graphique 1.6⁷.

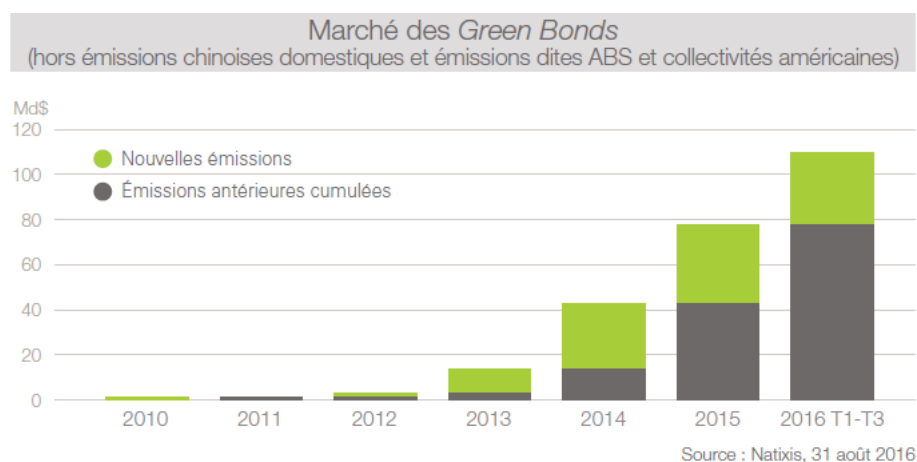


FIGURE 1.6 – Évolution du marché des obligations vertes

L'objectif de sensibilisation visé par les obligations vertes est relativement atteint, car désormais, aucun investisseur obligataire n'ignore l'existence et la raison d'être de ces obligations.

5. Source : www.icmagroup.org

6. www.climatebonds.net/cbi/pub/data/bonds

7. Source : Etude Novethic www.novethic.fr

De toute évidence, les obligations vertes constituent une nouvelle intéressante pour le financement de projets dans les pays émergents et en développement. En effet, les besoins de financements liés au changement climatique sont particulièrement importants pour ces pays. Perçu comme un véritable outil pouvant favoriser l'essor de marchés obligataires locaux, la Banque mondiale a ainsi émis plusieurs obligations vertes dans les devises de pays émergents. La Convention Cadre des Nations Unies sur les Changements Climatiques (CCNUCC) évoque un besoin d'investissement de 28 à 67 milliards.

Comme le précisent [Duru and Nyong \[2016\]](#), les acheteurs potentiels peuvent être, d'une part, des gestionnaires de portefeuilles conventionnels, des assureurs, des fonds de pension, à la recherche de stratégies durables à long terme. D'autre part, il peut s'agir des gestionnaires de portefeuilles dans une démarche ISR (investissements socialement responsables).

Sur le plan international, le groupe International Financial Corporation (IFC) - membre du groupe banque mondiale, détenu par 185 pays membres - est l'un des premiers émetteurs d'obligations vertes. Il a émis en novembre 2015, sur le marché primaire du *Johannesburg Stock Exchange*, la première obligation, en monnaie sud africaine, d'un montant de 71 millions de dollars, destinée aux financements de projets liés aux énergies renouvelables.

La France souhaitant être le premier **pays** à émettre une obligation à visée écologique, a annoncé en septembre 2016, l'émission en 2017 d'une *green bond* de plusieurs milliards d'euros [[Royal, 2016](#)]. Cette opération sera menée conjointement par des experts en économie et ceux des questions écologiques et environnementales. En Afrique, la Banque Africaine de Développement a choisi de dynamiser le secteur via le programme d'obligations vertes qui est en phase avec l'objectif croissance verte, de sa stratégie pour la période 2013 à 2022. Selon la BAD, "*ce programme favorise le financement de projets éligibles dans le cadre de la lutte contre le changement climatique*". Titre de dette, une obligation verte présente les mêmes caractéristiques qu'une obligation standard en termes de garantie, de séniorité ou de notation. La dernière obligation verte émise par la BAD présente les caractéristiques énumérées dans le tableau [1.1](#).

A défaut d'investir dans les *green bonds*, d'aucun pourrait être intéressé par un placement dans les entreprises déjà en place. Toutefois, pour dégager des rendements intéressants, il faudrait être en mesure de cibler les entreprises dont la qualité environnementale n'est pas encore contenue dans les prix.

Parmi les indicateurs reflétant la qualité et la vitalité du marché des capitaux d'une région, nous pouvons également retenir, celui du capital - investissement.

1.2.2 Marché du Capital-Investissement

Le capital-investissement, en terminologie anglaise *private equity*, est une forme d'investissement et de processus, par laquelle, un investisseur entre au capital de sociétés désireuses de capitaux propres. Il s'agit pour la plupart, d'investissement dans des sociétés non listées sur les marchés boursiers. Ces investissements peuvent prendre la forme d'injections directes de capitaux ou de rachats d'actions détenues par des actionnaires historiques. L'intérêt, pour un investisseur, est de pouvoir disposer de rendements plus importants que ceux générés par des actions de sociétés cotées.

Le capital-investissement s'exerce sur quatre segments : le capital-innovation (création ou premiers pas des entreprises), le capital-développement (accompagnement des entreprises dotées d'un fort potentiel de croissance), le capital-transmission / LBO (reprise d'une société arrivée à maturité) et le capital-retournement (acquisition d'entreprises sujettes à des difficultés). A travers ces quatre piliers, il permet ainsi de soutenir l'entreprise dans différents domaines :

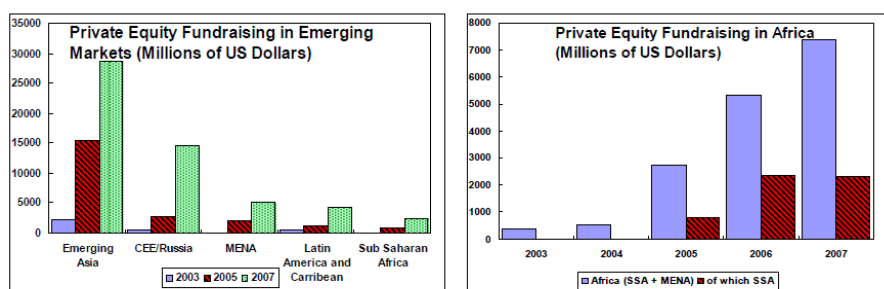
Emetteur	Banque africaine de développement, notée Aaa/AAA/AAA(Moody's/S&P/Fitch)
Montant Principal	500 000 000 dollars EU
Date de détermination du prix	09-déc-15
Date de règlement	17-déc-15
Date de maturité	17-déc-18
Prix d'émission/Rendement	99,903% / 1,408%
Coupon	1,375% (semi-annuel, 30/360)
Ecart par rapport au taux Mid-Swap	+14pb
Ecart par rapport au bon du trésor UST	1,250% échéance 15 Décembre 2018 +18,15pb
Dénominations	1 000 dollars EU ou tout multiple intégral
Documentations	Facilité d'émissions d'emprunts multimarchés
Cotation	Bourse de Luxembourg (Marché organisé)
ISIN	US008281BB25
Teneurs de livre associés	Barclays, Crédit Agricole CIB, Deutsche Bank

TABLE 1.1 – Caractéristiques obligation verte du programme de la Banque africaine de développement

- apport du financement des capitaux nécessaires à son développement
- accompagnement des équipes de direction lors des prises de décisions stratégiques
- amélioration de la capacité de création de valeur pour le compte des parties prenantes : clients, salariés, actionnaires et dirigeants.

En Afrique subsaharienne, le capital-investissement a enregistré un boom ces dernières années. Comme le rapporte l'OCDE (Organisation de Coopération et de Développement Économiques) en 2006, les levées de fonds dans des entreprises ont atteint un montant de 3.2 milliards de dollars. Les représentations graphiques 1.7 et 1.8⁸ montrent l'évolution des investissements de type *private equity* de 2006 à 2015. On remarque que ces investissements sont encore très bas en Afrique subsaharienne et restent très faibles lorsqu'ils sont mis en perspective avec ceux d'autres pays émergents. Aussi note t-on, une baisse pendant le premier semestre 2015 des levées de fonds et investissements dans les entreprises. Cela est à mettre principalement à l'actif du climat politique en Afrique, mais également des problèmes de transparence des entreprises sur des activités illicites qui seraient susceptibles de plonger les investisseurs dans des scandales de corruption ou de criminalité. Une autre barrière, et pas des moindres, qu'il convient de retenir est la difficulté de prospection d'entreprises cibles.

Cette revue de différents freins dans le domaine du *private equity*, ne doit cependant pas occulter les perspectives de développement importantes, dans la zone subsaharienne en Afrique, notamment dans le domaine des infrastructures. A ce propos, la banque mondiale estime à 90 milliards de dollars, le besoin annuel de financement d'infrastructures sur le continent d'ici à 2020.



Source: EMPEA

FIGURE 1.7 – Investissement de type *Private Equity* (Millions de dollars)

1.2.3 Marché Actions

L'investissement en actions est essentiellement orienté vers les pays tels que l'Afrique du Sud, le Nigéria, le Kenya, les Iles-Maurices et le Zimbabwe. Cette réalité est illustrée sur la figure 1.9, extraite de Masetti [2013].

Soixante huit des cent plus grosses compagnies en terme de parts de marché sont présentes à la bourse sud africaine. Parmi ces entreprises, figurent les cinq plus grosses compagnies du continent. Signalons qu'en capitalisation boursière en pourcentage du produit intérieur brut, sur la première décennie du deuxième millénaire, l'Afrique du Sud surpasse certains pays émergents et développés comme le démontre le graphique 1.10⁹. L'Afrique du Sud fait partie ainsi des places boursières les plus importantes au niveau international

8. Source : EMPEA (Emerging Markets Private Equity Association) www.empea.org

9. Sources : Banque mondiale, World Development Indicators (WDI)

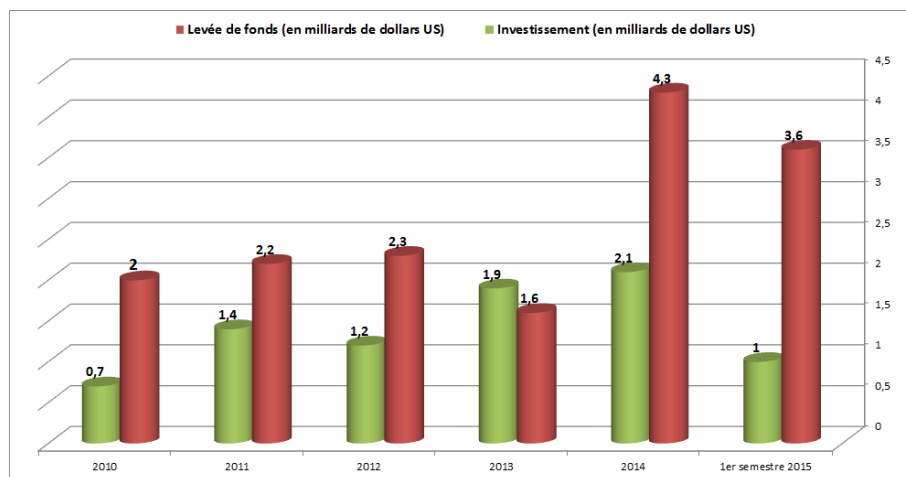


FIGURE 1.8 – Investissement de type *Private Equity*

Stock market capitalisation as of 2012

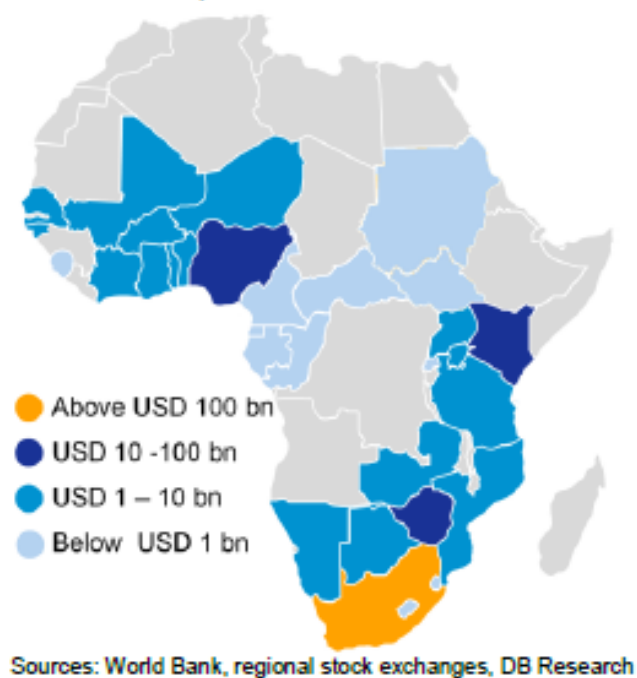


FIGURE 1.9 – Capitalisation boursière

et concurrence de grandes places émergentes comme celles de la Malaisie ou de la Chine. Mais ce ratio de capitalisation est à nuancer et à mettre en perspective avec le produit intérieur brut qui est potentiellement plus bas en Afrique du Sud que dans les pays abritant des grandes places financières tels que la France. Le ratio de *turnover*¹⁰ du marché sud

10. Le ratio de *turnover* mesure quant à lui le niveau de liquidité des marchés financiers. Il indique la valeur totale des actions échangées rapportée à la capitalisation totale.

africain, affiché sur le graphe 1.11¹¹, mesuré de 2000 à 2010, permet également de souligner le dynamisme de l'Afrique du Sud.

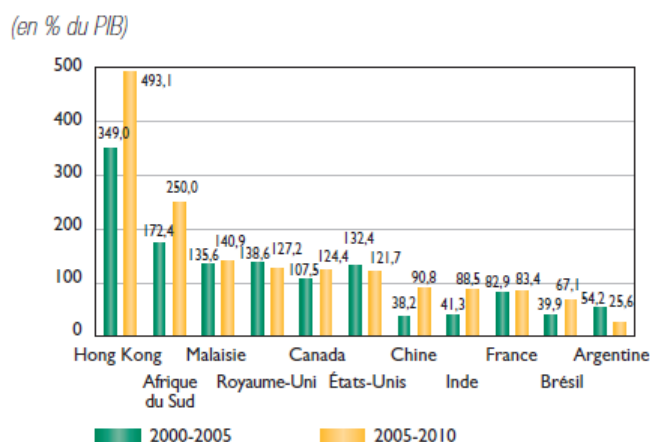


FIGURE 1.10 – Ratio capitalisation boursière/PIB de 2000 à 2010

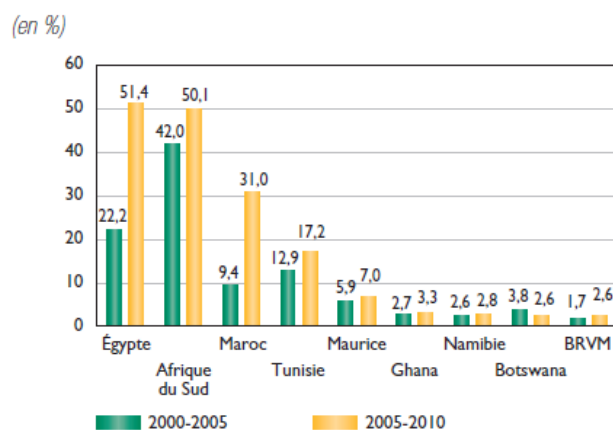


FIGURE 1.11 – Ratio de Turnover de 2000 à 2010

Nous présentons à présent quelques éléments caractéristiques des deux plus importantes bourses de l'Afrique subsaharienne.

L'Afrique du Sud, République qui porte bien son nom, et première économie du continent, est situé à l'extrémité australe. Nous proposons dans la table 1.2 quelques caractéristiques notables.

- FTSE/JSE : Johannesburg Stock Exchange, première place financière électronique en Afrique et seizième bourse mondiale constituée de 9 indices. Historiquement, elle a été fondée pour permettre aux entreprises minières de disposer davantage de capitaux pour l'essor de la nouvelle industrie minière. L'indice FTSE/JSE existe sous sa forme actuelle depuis le 24 juin 2002 et recense 160 entreprises cotées. Nous considérons dans notre étude, l'indice JSE-ALSH (en abréviation JALSH) qui recense 99% de ces entreprises cotées en terme de capitalisation boursière pleine.

11. Source : Banque mondiale

Données démographiques	
Population	55 millions d'habitants (INSEE 2015)
Croissance démographique	1.6% (INSEE 2015)
Données économiques	
Monnaie	Rand Sud-Africain (symbole : ZAR)
Convertibilité	1 dollar US = 13.30 ZAR au 27/04/2017
PIB	367.2 Milliards de dollars US en 2014 (Banque mondiale)
Taux de croissance	1.3% en 2015 (Fonds Monétaire International)
Taux d'inflation	4.6% en 2015 (Banque centrale sud-africaine)

TABLE 1.2 – Données démographiques et économiques de l'Afrique du Sud

La République du Nigéria, située près le Bénin, est le pays le plus peuplé d'Afrique. Nous présentons dans le tableau 1.3 quelques données importantes

Données démographiques	
Nombre d'habitants	182 millions (INSEE 2015)
Croissance démographique	2.8% (INSEE 2015)
Données économiques	
Monnaie	Naira Nigérian (Symbole : NGN)
Convertibilité	1 dollar US = 314.5 NGN au 27/04/2017
PIB	481 Milliards de dollars US en 2015 (Banque mondiale)
Taux de croissance	4.8% (FMI 2015)
Taux d'inflation	9.6% (FMI 2015)
Principaux clients	UE (35%), Inde (12.1%), US (11.3%), Brésil (10%)
Principaux fournisseurs	UE (23.3%), Chine (21%), EU (11.3%), Inde (4.6%)

TABLE 1.3 – Données démographiques et économiques du Nigéria

- NGSE : Nigerian Stock Exchange existe depuis 1960. Cette plateforme financière électronique est la deuxième plus grande de l'Afrique subsaharienne et est constituée de 12 indices. En 1995, il fut ouvert aux investisseurs étrangers, ce qui lui a permis un développement considérable. Dès lors, des efforts considérables ont été faits pour assurer une transparence dans la qualité des données, des entreprises, mais également pour disposer de professionnels mieux formés aux opérations boursières.

Une présentation détaillée de ces marchés sera effectuée dans la section 1.3.

1.3 Réglementation des marchés des capitaux

Le développement des marchés financiers, en Afrique subsaharienne, a fait l'objet d'une attention particulière cette dernière décennie. En dépit des stratégies soutenues par les bailleurs de fonds, la plupart des bourses demeurent sous-développées et ne permettent pas d'influer sensiblement sur l'économie africaine. Mis à part l'Afrique du Sud, les marchés de capitaux demeurent limités et rares sont les pays disposant d'un marché obligataire réellement viable. La réglementation constitue le premier mode d'offre de politique de développement financier. Le développement d'un cadre juridique constitue un pré-requis à l'essor des marchés financiers.

1.3.1 Cadre juridique

Comme le souligne si bien [Mvogo \[2012\]](#), dans sa thèse, deux aspects sont à prendre en compte en matière de régulation :

- insécurité juridique : correspond à l'incapacité de la règle de droit, dans son état actuel, à répondre aux besoins de ses utilisateurs. La plupart des textes datent de l'époque coloniale pour certains pays et sont inadaptés à la situation actuelle.
- insécurité judiciaire : particulièrement importante, elle définit les règles attenantes au respect et à la sanction des contrats financiers. Cette insécurité résulte donc de la dégradation de la qualité des décisions de justice rendues. Aussi, est-il à noter que les intermédiaires financiers souffrent d'une probante difficulté à faire sanctionner leur contrat. Plusieurs facteurs viennent expliquer cela :
 - la lenteur administrative de la justice
 - la pertinence de la sanction
 - la corruption des systèmes judiciaires
 - les difficultés d'exécution des décisions

Plusieurs études attestent du rôle central de ces deux aspects, juridique et judiciaire, dans le développement des marchés financiers. [Djankov et al. \[2005\]](#) portent un regard sur le rôle de la protection des brevets et de sanction des contrats. [Laeven and Mojononi \[2005\]](#) confirment quant à eux la pertinence de l'efficacité des tribunaux.

Pour répondre à cette problématique en Afrique francophone, existe depuis 1993, l'Organisation pour l'Harmonisation en Afrique du Droit des affaires (OHADA), dont le siège est au Bénin.

Présentation de l'OHADA

L'OHADA est née des suites du traité de Port-Louis du 17 octobre 1993. Ce système juridique et judiciaire est *l'une des expériences d'intégration juridique les plus réussies de la fin du 20ème siècle*¹². L'OHADA regroupe aujourd'hui 17 États (Bénin, Burkina Faso, Cameroun, Comores, Congo, Côte d'Ivoire, Gabon, Guinée Bissau, Guinée, Guinée Equatoriale, Mali, Niger, République Centrafricaine, République démocratique du Congo, Sénégal, Tchad, Togo). Son objectif est la facilitation des échanges et des investissements, la garantie de la sécurité juridique et judiciaire des activités des entreprises. Le droit de l'OHADA est ainsi utilisé pour propulser le développement économique et créer un vaste marché intégré afin de faire de l'Afrique un « pôle de développement ».

De son côté, l'Afrique du Sud a édité en 2012, un document stipulant les contours nécessaires au bon développement du marché des capitaux et la sécurité des intervenants des marchés financiers. Par exemple, dans le chapitre 3 du document, il est établi les règles de conduite des intervenants. Pour plus d'informations, se référer aux documents officiels¹³. Des règles équivalentes sont également présentes sur le marché nigérian telles qu'éditées à l'article 16.20 du *Rule Book* à la page 168¹⁴.

12. Source : <http://www.ohada.com/>

13. www.fsb.co.za

14. Source : <http://www.nse.com.ng>

1.3.2 Cadre opérationnel

1.3.2.1 'The Financial Services Board' (FSB) en Afrique du Sud

Le FSB, institution indépendante, intervient dans la promotion et le maintien d'un environnement financier adéquat en Afrique du Sud. Il est responsable, pour l'intérêt public, de la régulation et de la supervision du marché des capitaux. Ses missions se déclinent comme suit :

- Traitement "juste" des consommateurs et utilisateurs des services et produits financiers
- Maintien de la stabilité du système financier
- Maintien de l'intégrité des marchés financiers et institutions associées.

Critères d'éligibilité

Est admissible à l'indice JSE/All Shares, toute société listée sur le *main board* du *Johannesburg Stock Exchange*. La présence sur le *main board* est soumise à l'émission de 25 millions de titres, chaque classe de titres devant être détenue à plus de 20% par le public afin d'en assurer la liquidité¹⁵.

Un autre critère d'admissibilité est le celui de classification africaine. Cela signifie que tout candidat à l'inclusion à l'indice, en dehors des firmes sud-africaines, doit être soit :

- domicilié sur le continent africain, hors Afrique du Sud ou
- ayant la majorité de ses activités géographiquement localisées en Afrique hors Afrique du Sud ou
- coté sur un autre marché financier africain utilisant une plateforme d'échange approuvée par le *Johannesburg Stock Exchange*.

Critères de *free float* ou flottant

Rappelons que la notion de flottant fait référence au nombre total d'actions dont on exclut les actions détenues par des investisseurs stratégiques tels que les gouvernements, les actions des actionnaires de contrôle ou encore celles détenues par le management. Ainsi, plus le flottant d'une entreprise sera important, plus cette dernière sera liquide mais reste vulnérable face aux Offres Publiques d'Achat. Au regard de cette définition, sont par exemple exclues de cet indice, les *Exchange Traded Funds* et les fonds dont les valeurs dérivent directement d'une holding sous-jacente (fonds mutuels par exemple). L'intégralité du capital social d'une société est utilisée dans le calcul de sa valeur boursière, hormis les restrictions dues au flottant. Le critère *free float* est calculé sur la base d'informations publiques collectées en continu. Dès lors, la valeur de ce critère, pour un membre de l'indice sera modifiée à condition que sa variation absolue arrondie dépasse 3%. Selon le document public¹⁶ du *Johannesburg Stock Exchange*, ce seuil de 3% n'est pas appliqué aux compagnies dont le *free float* oscille entre 5% et 15%.

Critères de liquidité

Le comité consultatif de l'indice JALSH, qui se tient à une fréquence semi-annuelle (Mars et Septembre), doit s'assurer que les prix disponibles sont suffisamment fiables et précis et

15. Source : *Ground Rules FTSEJSE Africa Index Series* téléchargeable à l'adresse : <https://www.jse.co.za/content/JSEIndexClassificationandCodesItems/FTSE%20JSE%20Ground%20Rules.pdf>

16. Source : *JSE Limited Listings Requirements* téléchargeable sur <https://www.jse.co.za/content/JSERulesPoliciesandRegulationItems/JSE%20Listings%20Requirements.pdf>

qu'ils pourraient être utilisés dans la détermination de la capitalisation boursière des entreprises. Pour ce faire, ce comité exploite les derniers prix disponibles sur le *Johannesburg Stock Exchange* et pourraient exclure de l'indice toute entreprise dont elle juge les prix non conformes aux critères de précision et de fiabilité.

Cet indice inclue 99% de la capitalisation boursière pleine (flottant + restrictions). Au 31 mars 2017, 164 entreprises sont cotées sur l'indice FTSE/JSE All - Shares avec une capitalisation totale nette de 6,574,988 milliards de rands sud-africain dont plus de la moitié est du fait de 10 grandes entreprises¹⁷. La plus grande entreprise cotée opère sur le secteur des médias et pèse plus de 15% de la capitalisation boursière totale.

1.3.2.2 'The Securities and Exchange Commission' (SEC) au Nigéria

La SEC est responsable de la régulation de l'ensemble des opérateurs et des opérations du marché financier nigérian.

Elle poursuit deux grands objectifs :

- Régulation du marché : pour atteindre cet objectif de régulation du marché, elle mène, entre autres, les activités suivantes :
 - agrément des titres et des intervenants. Elle doit ainsi s'assurer de leur intégrité morale et de leur compétence. On retrouve sur le marché des brokers, des chambres de compensation, des sociétés de gestion en termes d'opérateurs. Les produits tels que les actions, les instruments de dette, les futures, les options et bien d'autres dérivés sont listés sur le marché financier local.
 - contrôle : l'autorité effectue des missions de contrôle sur place ou sur pièces de façon régulière. Des contrôles inopinés sont également diligentés.
 - surveillance : La SEC mène les actions nécessaires à la détection de pratiques de marché dommageables
 - Suivi des règles : L'autorité de régulation s'assure de la conformité de ses règles avec les standards internationaux.
- Développement du marché : La SEC agit en ce sens, en collaborant avec les parties prenantes, à l'introduction de nouveaux produits et processus. Elle encourage, pour ainsi dire toute démarche visant à la vulgarisation des mécanismes de marché.

Critères d'éligibilité

Une des particularités ici est traduite dans les critères d'éligibilité. En effet, tout candidat à l'inscription à l'indice NGSE-All Share doit être parrainé par un membre de négociation opérant déjà sur le marché. De plus, les critères, non exhaustifs suivant sont requis :

- Toute compagnie candidate doit faire appel à l'épargne publique ou avoir démontré que la population est suffisamment informée ou est disposée à souscrire à ses actions.
- Toute demande de cotation doit avoir au préalable été enregistrée par la SEC.
- Le candidat à la cotation doit justifier de 3 années d'exercice.
- Tous les comptes du candidat doivent être édités selon la réglementation internationale IFRS.
- Tout candidat doit prévaloir d'une capitalisation d'au moins 4 milliards de naïras à la date de cotation calculée en fonction du prix d'émission et du capital social.

17. Source : <http://www.ftse.com/Analytics/FactSheets/temp/5c47d269-c6aa-4ebb-92fd-b1d7a88fd443.pdf>

Critères de *free float* ou flottant

Tout comme l'Afrique du Sud, des règles en matière de flottant sont à respecter par les opérateurs présents sur le marché. Comme le stipule la règle 17.21 du *Rule book*¹⁸, toute entreprise cotée sur un indice nigérian doit maintenir son flottant au dessus du minimum requis. S'il advenait que le flottant passe en-dessous du niveau requis, la firme doit notifier cette situation au comité qui exigera le retour au niveau minimum dans un délai imparti. De surcroît, obligation est faite à la firme d'informer ses actionnaires dans un délai de 10 jours ouvrés, en précisant par ailleurs, qu'une suspension de sa cotation est plausible s'il elle ne se conformait pas aux exigences dans un laps de temps prévu par la réglementation en vigueur. De manière exceptionnelle, l'entreprise cotée peut obtenir un sursis d'un an ou plus, à l'issue duquel elle serait radiée si elle échoue à la règle de détention d'un pourcentage minimum d'actions par le public.

Critères de liquidité

Pour s'assurer de la liquidité du marché, l'autorité de régulation peut immédiatement intervenir en sollicitant de la part d'une entreprise cotée, des informations de nature à l'éclairer sur des mouvements inattendus ayant effet sur le prix de l'action et des volumes échangés. Le NGSE - All Share compte 165 entreprises au 30/04/2017.

1.4 Réglementation prudentielle

Plusieurs pays d'Afrique, particulièrement subsahariens font la démarche de souscrire aux réglementations en vigueur dans les pays développés. Nous présentons ici, une brève description des textes en vigueur, ou en passe de l'être en Afrique du Sud et au Nigéria.

1.4.1 Solvency Assessment and Management en Afrique du Sud

L'autorité de régulation des marchés financiers, FSB présenté supra, a élaboré un cadre réglementaire applicable aux assureurs sud-africains. De sa dénomination anglaise *Solvency Assessment and Management*, ce régime de solvabilité établi, s'inspire de la directive Solvabilité II en vigueur dans les pays de l'Union Européenne depuis janvier 2016, tout en prenant la précaution de prendre en compte le contexte local. La directive SAM a pour objectif principal, la protection des assurés et des bénéficiaires des contrats d'assurance. L'un des autres objectifs de cette directive est de maintenir la stabilité financière. Pour situer les travaux du comité de pilotage (cf. figure 1.12¹⁹) dans le temps, il est à noter que les discussions ont démarré en octobre 2011 pour connaître un épilogue fin 2015.

Les différents modules retenus dans le cadre du solvency assessment and management sont présentés sur le graphique 1.13

Nous présentons en comparaison, le mapping des modules de risques tel qu'établi dans la directive solvabilité II, sur le graphe 1.14.

QIS3 SAM et QIS5 SII

De manière analogue à solvabilité II, la directive SAM comporte exactement trois piliers. Ainsi, le pilier 1 traite des exigences quantitatives, le pilier 2 est relatif aux exigences qualitatives (gouvernance et ORSA) et le pilier 3 porte sur la communication (informations destinées au public et au superviseur). Les différents exercices ont permis d'aboutir à l'étude d'impact quantitatif 3 qui ressemble en de nombreux point au QIS 5 de solvabilité II.

18. Source :

19. Source : <https://www.fsb.co.za/Departments/insurance/Documents/FSBSAMRoadmap.pdf>

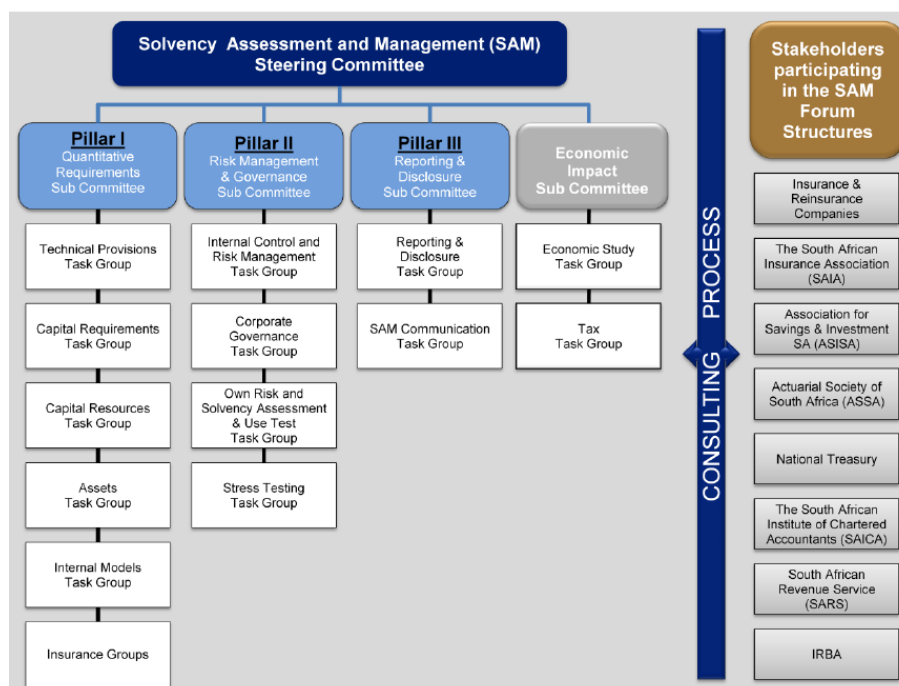


FIGURE 1.12 – Structure du comité de pilotage du SAM

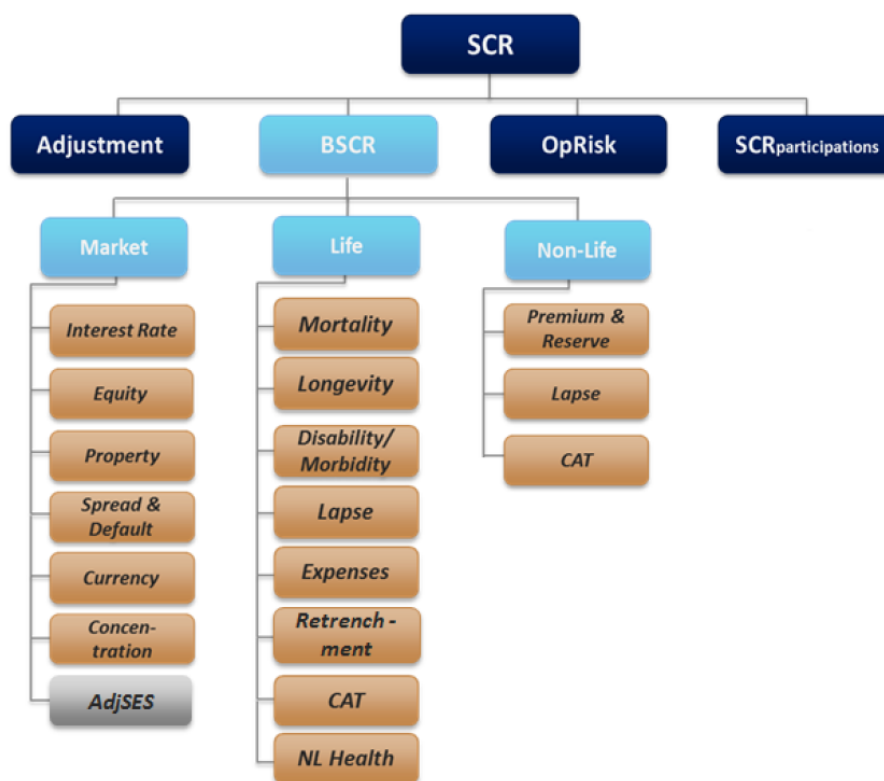


FIGURE 1.13 – Structure globale des modules de risque du solvency assessment and management.

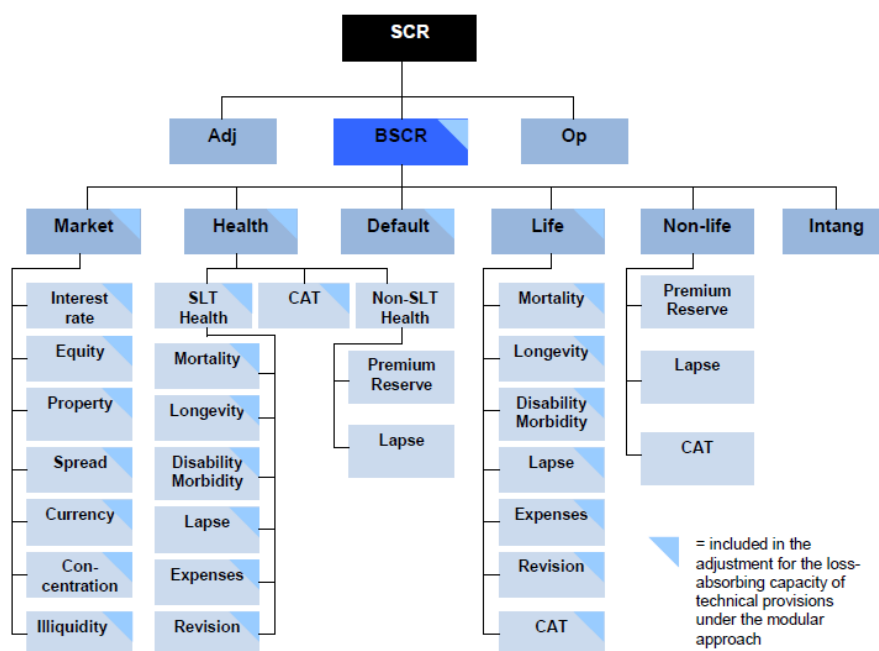


FIGURE 1.14 – Structure globale des modules de risque de la directive européenne solvabilité II.

Toutefois, nous faisons un focus sur les différences détectées relativement au risque action qui est celui principalement traité dans ce mémoire. Bien que le risque action intègre les risque de "prix" et de "volatilité", nous ne traiterons que le risque "prix".

Risque action selon le pilier I

Solvabilité II subdivise le risque action en deux sous classes :

- *Global equities* et
- *Other equities*

Choc de base

Pour ces deux sous-classes, la directive SAM retient les mêmes niveaux de chocs de base que solvabilité II, soient à 39% et 49% respectivement.

Cependant, pour prendre en compte la spécificité de son marché, la directive SAM intègre une troisième sous-classe dénommée : *South African equities* ou *RSA*²⁰ *equities*. Le comité de pilotage explique que pour cette sous branche, il s'agira de prendre en compte les différences des courbes de taux EUR et ZAR²¹, pour les maturités 15 et 20 ans. L'idée est de quantifier l'écart de taux à long terme, en considérant que les courbes de taux sont davantage stables à long terme qu'à court terme. Il en ressort, selon FSB [2012], que l'écart de taux est de 4%, ramenant ainsi le choc de base de *RSA equities* à 43% (39% + 4%).

Ajustement symétrique

Le niveau de choc final tient compte du choc de base et d'un facteur d'ajustement symétrique. Ce dernier, dans le cadre de QIS5 de solvabilité II (article 106), correspond à

20. Republic of South Africa

21. rands sud-africain

la moyenne mobile sur trois années de l'indice MSCI World Index au 31/12/2009 et est égal à -9%. Ce facteur d'ajustement de 10% symétrique sera conservé, Pour le QIS1 et les catégories *Global equities* et *Other equities*, le facteur d'ajustement calculé sur la base de l'indice MSCI World Index ressort à +10% au 31/12/2010. Pour la nouvelle catégorie *South African equities*, le facteur d'ajustement calculé, sur la base de l'indice JSA AllShare price index, se positionne également à 10% comme le précise FSB [2012] et repris dans la table 1.4. Pour l'exercice du QIS3, le SAM recommande les valeurs répertoriées dans le

Catégorie	choc de base	Facteur d'ajustement	choc final
Global	39%	10%	49%
RSA	43%	10%	53%
Other	49%	10%	59%

TABLE 1.4 – Valeurs des chocs en vigueur pour le QIS1 du SAM en Afrique du Sud

tableau 1.5, selon la date de l'exercice. Relativement à cette subdivision du risque action,

Date d'exercice	Global	RSA	Other
31/12/2012	+0%	+8%	+8%
31/01/2013	+3%	+9%	+9%
28/02/2013	+2%	+7%	+7%
....			

TABLE 1.5 – Valeurs des coefficients d'ajustement symétriques selon les dates d'exercice

la matrice de corrélation à considérer dans le calcul du SCR action et précisée dans la table 1.6.

Corrélation	Global	RSA	Other
Global	1		
RSA	0.75	1	
Other	0.75	0.75	1

TABLE 1.6 – Matrice de corrélation pour le calcul du SCR action (approche standard) selon la réglementation SAM

1.4.2 Solvabilité II au Nigéria

Au Nigéria, la commission nationale d'assurance (NAICOM), semble avoir opté pour la mise en oeuvre intégrale de solvabilité II pour la régulation de son marché d'assurance. Si cela est confirmé, le Nigéria se positionne ainsi comme le premier pays africain à se conformer intégralement aux standards internationaux en matière d'assurance. Selon le président de ladite commission, se conformer à solvabilité II permettrait aux assureurs africains de s'exporter aussi bien que leurs homologues brésiliens. Toutefois, il semble inévitable de prendre en compte les spécificités locales afin d'aboutir à une version sur-mesure et cohérente.

1.5 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de dresser un état des lieux des principaux marchés financiers africains subsahariens. Il nous a permis tout particulièrement de présenter le dynamisme

du marché sud-africain, en terme de capitalisation boursière, de produits financiers et de la compétence de l'organe de régulation et des différents opérateurs. D'un point de vue réglementaire, l'Afrique du Sud a mis en place une directive semblable à la réglementation européenne solvabilité II, tout en y apportant des amendements tenant compte de son environnement et des spécificités du marché. Le Nigéria, quant à lui est en phase de mise en application intégrale de la directive solvabilité II, dans l'optique de permettre aux assureurs locaux de répondre à des standards internationaux et de pouvoir s'exporter à l'international.

Nous comprenons donc que l'Afrique du Sud est très en avance sur le sujet de la réglementation et a dû faire face à des difficultés et contraintes que le Nigéria devrait rencontrer à son tour. Il s'agira notamment de la quantité de travaux requis auprès de tous les acteurs. En effet, les assureurs sont confrontés à des thématiques nouvelles pouvant les pousser à repenser intégralement leurs outils informatiques. Cela engendrera de fait des coûts conséquents pour les différents acteurs impactés. Néanmoins, la mise en place de la réglementation peut être vue comme une opportunité de s'interroger sur leur système de pilotage et éprouver leur système d'information, menant ainsi à une refonte de leur politique prudentielle.

Chapitre 2

Approche de modélisation des indices financiers

Contents

2.1	Introduction	37
2.2	Approches standards de modélisation	38
2.2.1	Modèle dit de 'marche aléatoire'	38
2.2.1.1	Théorie de la marche aléatoire	38
2.2.1.2	Test de normalité et fonction d'auto-corrélation	39
2.2.2	Modèles ARCH et GARCH	41
2.2.3	Modèle E-GARCH	43
2.3	Quid de l'efficience des marchés financiers africains subsahariens ?	44
2.4	Nouvelle approche de modélisation : processus à changement d'états	45
2.4.1	Contexte	45
2.4.2	Rappel sur les chaînes de Markov à nombre fini d'états	46
2.4.3	Méthode d'estimation des paramètres d'un processus à changement d'états log-normal	47
2.4.4	Une propriété intéressante et utile des processus à changement de régimes	52
2.5	Sélection de modèles	55
2.5.1	Critère d'Information d'Akaike	55
2.5.2	Critère d'Information de Bayes	55
2.6	Conclusion	56

2.1 Introduction

Le présent chapitre est destiné à apporter un éclairage quantitatif sur les indices étudiés à savoir sud-africain et nigérian. L'idée centrale sera la recherche d'un modèle d'adéquation aux données considérées.

Les graphiques de la figure 2.1 permettent de se rendre compte de l'évolution des indices nigérian et sud-africain pendant près de deux décennies. Ces données sont celles ayant servi aux analyses produites dans la suite de ce chapitre.

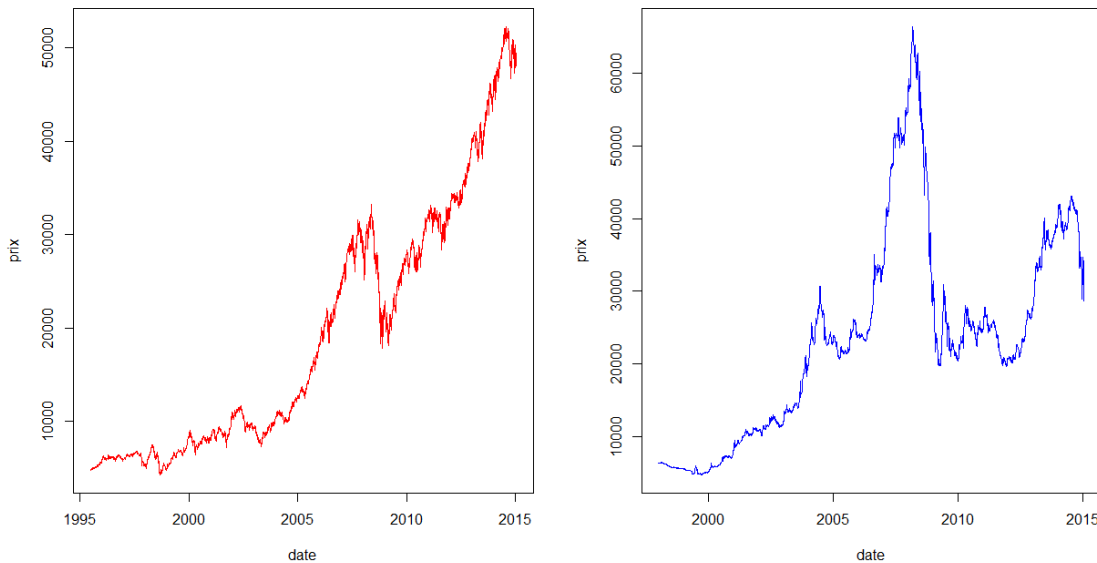


FIGURE 2.1 – Evolution du cours des indices boursiers sud africain (à gauche de 1995 à 2015) et nigérian (à droite de 1998 à 2015). Source Bloomberg.

On remarque pour l'ensemble des indices, des pics précédant la crise des subprimes. Clairement donc, l'Afrique aura été impacté, le Nigéria plus particulièrement touché selon le graphique de droite. De manière plus parlante, l'indice nigérian s'est écroulé de juillet 2008 à avril 2009, perdant plus de 60% de sa valeur. Le niveau de l'indice avant crise n'a jamais été atteint à nouveau depuis. Au 31/03/2017, la valeur de l'indice NGSE - All Shares était de 25 516.34.

A contrario, l'Afrique du Sud semble avoir mieux subi la crise malgré une perte de 28% de sa valeur avant crise, puisque l'indice est désormais à 74% supérieur à cette valeur pré crise. Au 31/03/2017, la valeur de l'indice JALSH relevée est de 52 071.61 conforme à la moyenne relevée entre 2014 et 2015. Le graphique 2.2 propose une vue comparée de l'évolution des cours des deux indices de 2013 à 2017. Notons toutefois que les différents modèles exposés par la suite n'intègrent pas les développements récents de l'économie africaine subsaharienne. En effet, l'Afrique du Sud est officiellement entrée en récession après 2 trimestres consécutifs de décroissance du produit intérieur brut en raison d'une baisse conjuguée de la consommation et de la production d'électricité et de produits manufacturiers. Le Nigéria quant à lui a été largement impacté par la crise du secteur pétrolier. Aux vues des données entre 2015 et 2017 2.2, on constate que l'indice sud-africain a maintenu un niveau de volatilité comparable alors que l'indice nigérian remonte après une baisse assez conséquente.



FIGURE 2.2 – Evolution des cours entre 2013 et 2017. En bleu l’indice nigérian et l’indice sud-africain en orange. (Source : Bloomberg).

Considérant dans la suite la série temporelle constituée des log rendements, nous proposons d’étudier la notion d’efficacité des deux marchés considérés. Ensuite, nous proposerons une revue synthétique des modèles rencontrés dans la littérature traitant de ces indices. Nous suggérons enfin une nouvelle méthodologie jusque là non étudiée dans le contexte africain, en mettant un accent particulier sur la méthode d’estimation des paramètres. Cette dernière étape nous amènera à présenter des critères statistiques de type AIC et BIC permettant de comparer l’ensemble des modèles présentés et d’aboutir à un choix de modèle.

2.2 Approches standards de modélisation

Nous tentons dans ce travail, d’apporter aux investisseurs des outils permettant d’apprécier le risque financier de ces indices. Cette étude sera faite conjointement à l’analyse de l’efficacité de ces différents marchés existants. L’efficacité étant le postulat selon lequel, les prix des actifs reflètent toute l’information disponible.

Nous étudierons à cette fin un certain nombre de modèles mathématiques.

Notations

S_t : valeurs de l’indice boursier aux instants $t = 1 \dots n$

$y_t = \ln S(t + 1) - \ln S(t)$: rendement logarithmique de l’indice, $t = 1 \dots n - 1$

μ la moyenne des rendements.

2.2.1 Modèle dit de ‘marche aléatoire’

2.2.1.1 Théorie de la marche aléatoire

Bachelier [1900] fut l’un des pionniers à développer cette théorie au travers de sa thèse intitulée : *Théorie de la spéculation*. Il intuïta que la dynamique des cours boursiers est régie par des évolutions aléatoires imprévisibles. Sur la base de cette hypothèse, Malkiel [1996],

à la page 24, remarque ceci : *Si l'on tire toutes ses implications logiques, elle estime qu'un singe aveugle jetant des fléchettes sur des pages financières d'un journal sélectionnerait un portefeuille qui ferait aussi bien que celui qui avait été soigneusement choisi par des experts.*

Pour vérifier l'hypothèse de la marche aléatoire, considérons l'équation suivante :

$$y_t = \ln(S(t + 1)) - \ln(S(t)) = \Delta \ln S(t + 1) = \mu + \epsilon_t$$

avec ϵ_t tel que $E[\epsilon_t] = 0$, $E[\epsilon_s \epsilon_t] = 0$ pour $t \neq s$ et $E[\epsilon_t^2] = \sigma^2$.

Nous recourons dans un premier temps au test Phillips-Perron dont les résultats sont présentés dans le tableau 2.1. Il permet de se rendre compte que l'hypothèse de racine unitaire n'est pas acceptée avec un risque d'erreur inférieur à 1%. Le modèle de marche aléatoire ne semble donc pas adéquat. Nous poussons toutefois l'analyse plus loin, pour davantage confirmer cette première conclusion.

	Afrique du Sud	Nigéria
Dickey-Feller Z(alpha)	-4358.989	-2610.083
p-value	< 0.01	< 0.01

TABLE 2.1 – Test de racine unitaire des log-rendements

2.2.1.2 Test de normalité et fonction d'auto-corrélation

Nous complétons le précédent test en analysant la fonction d'auto-corrélation au moyen des graphiques 2.3 et 2.4.

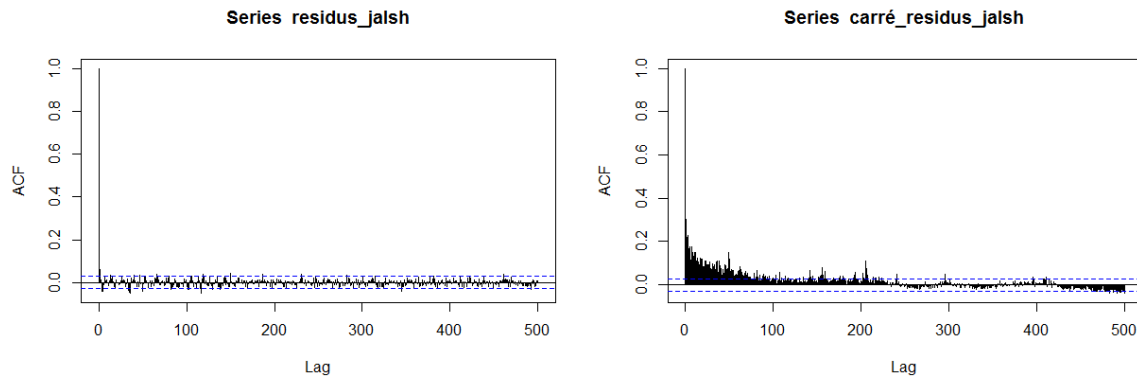


FIGURE 2.3 – Autocorrélation des résidus et des carrés des résidus des rendements de l'indice sud-africain avec un lag de 500

On constate que les variations sont locales, mais également que la volatilité d'un jour influe sur celle du lendemain en période de forte incertitude.

Le tableau 2.2 présente les statistiques descriptives des indices sud-africain JALSH et nigérian NGSE.

Les différents tests de normalité rejettent, sans surprise, l'hypothèse selon laquelle les log-rendements (indices JALSH et NGSE) sont gaussiens. Cette analyse est confirmée par le test de Jarques Bera et les valeurs des kurtosis pour les deux indices présentés dans la table 2.2. Les fonctions d'autocorrélation des figures 2.3, 2.4 et le test de Ljung-Box du tableau 2.2 appuient l'hypothèse selon laquelle les résidus des rendements des différents

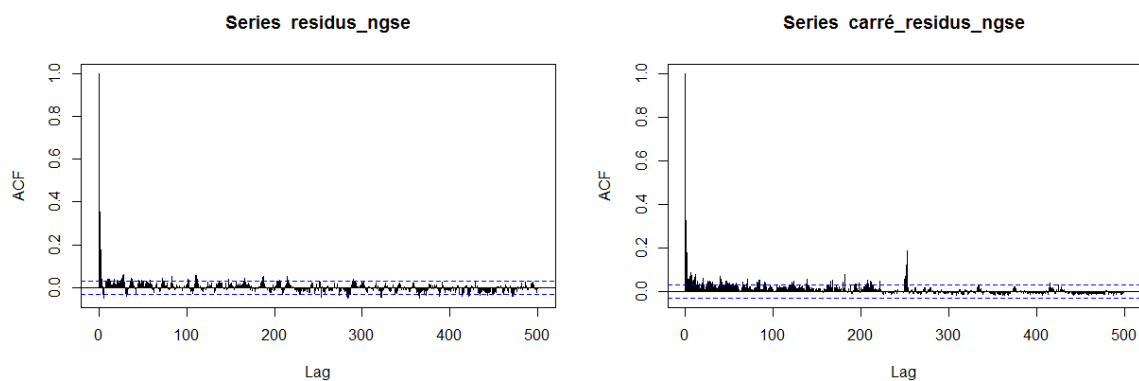


FIGURE 2.4 – Autocorrélation des résidus et des carrés des résidus des rendements de l'indice nigérian avec un lag de 500

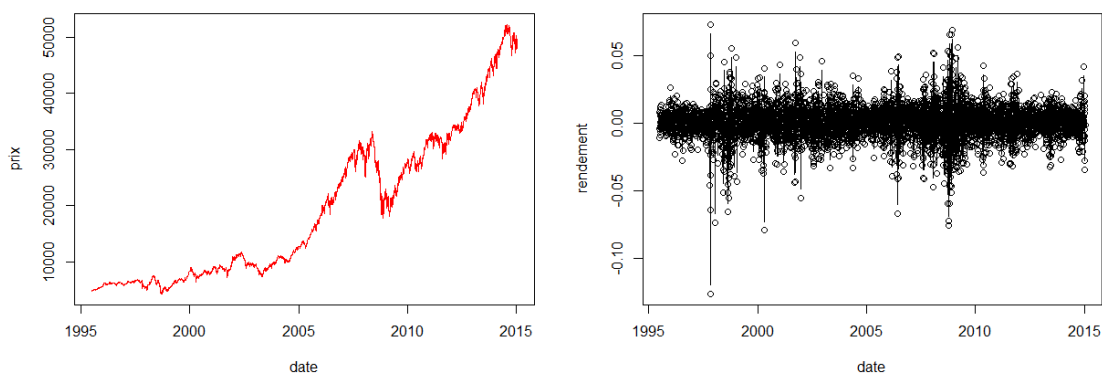


FIGURE 2.5 – Prix et rendements journaliers de l'indice Sud-Africain JALSH (1995-2015)

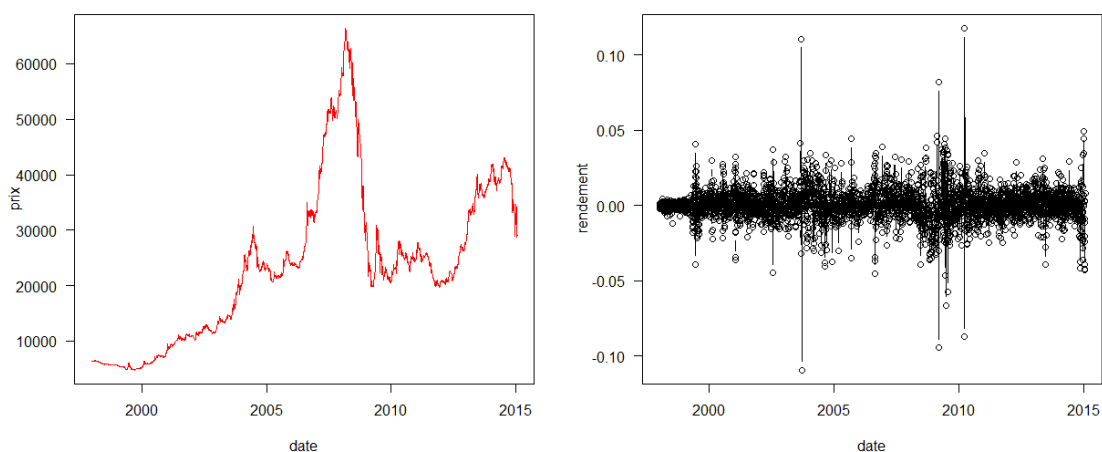


FIGURE 2.6 – Prix et rendements journaliers de l'indice nigérian NGSE - All Shares (1998-2015)

Statistiques	Afrique du sud	Nigéria
Données	1995-2015	1998-2015
Taille	4885	4067
Moyenne (μ)	0.00047	0.00037
Ecart-Type (σ)	0.01243	0.01055
Skewness	-0.46523	0.10075
Kurtosis	9.16129	18.46122
JB	7902.966	40515.77
p-value	$< 2.2e - 16$	$< 2.2e - 16$
LB	18.8725	512.0163
p-value	1.398e-05	$< 2.2e - 16$

TABLE 2.2 – Statistiques descriptives des log-rendements journaliers

Coefficients pour l'indice sud-africain				
	Estimate	Std. Error	t value	$Pr(> t)$
Intercept	0.0004699	0.0001778	2.462	0.00826
Residuals				
Min		1Q	Median	Max
-0.126754		-0.006252	0.000276	0.072186
Coefficients pour l'indice nigérian				
	Estimate	Std. Error	t value	$Pr(> t)$
Intercept	0.0003703	0.0001655	2.237	0.0253
Residuals				
Min		1Q	Median	Max
-0.109789		-0.004374	0.000370	0.117213

TABLE 2.3 – Test de significativité

indices étudiés ne sont pas indépendants. La présence d'autocorrélations pourrait provenir de cotations asynchrones [Scholes and Williams, 1977, Fisher, 1966] ou de prévisibilité des rendements sur le court terme comme l'indiquent Conrad and Kaul [1988].

Significativité des coefficients

Nous recourons au test de Student pour étudier la significativité du coefficient μ de l'équation 2.2.1.1. Les résultats, du test, pour l'ensemble des indices, sont présentés dans le tableau 2.3.

Le test permet de constater que les coefficients sont significativement non nuls, pour les deux indices considérés. Nous pouvons, sur la base d'un seuil de 5% et des résultats du tableau 2.1, déduire que les données financières considérées ne décrivent pas une marche aléatoire et qu'elles sont alors prévisibles.

2.2.2 Modèles ARCH et GARCH

L'hypothèse principale dans le modèle Black et Scholes est la constante de la volatilité du prix des actifs. Cette hypothèse a montré ces limites. Ces critiques sont illustrées à l'aide des graphiques 2.5 et 2.6.

Modèle ARCH

Engle [1982] a introduit les processus ARCH (AutoRegressive Conditionally Heteroscedastic) pour modéliser l'inflation au Royaume-Uni.

Le modèle ARCH(q) (Engle [1982], Hardy [2003]), se définit comme suit :

$$y_t = \mu + \sigma_t \epsilon_t \quad (2.1)$$

avec

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i (y_{t-i} - \mu)^2 \quad (2.2)$$

Les variables ϵ_t sont indépendantes et identiquement distribuées (iid) selon une loi normale standard.

La forme la plus simple ARCH(1) s'écrit naturellement comme :

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1 (y_{t-1} - \mu)^2 \quad (2.3)$$

Modèle GARCH

Le modèle GARCH développé par Bollerslev [1986], est une généralisation du précédent modèle. Il est jugé plus flexible et convient à d'avantages applications économétriques que le modèle ARCH.

Dans sa formulation générale, le modèle GARCH (p, q) se définit comme suit :

$$y_t = \mu + \sigma_t \epsilon_t \quad (2.4)$$

avec

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i (y_{t-i} - \mu)^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (2.5)$$

avec $p > 0, q > 0,$

$a_0 > 0, \alpha_i \geq 0, i = 1 \dots q$

$\beta_j \geq 0, j = 1 \dots p.$

Dans le cas particulier $p = 0$, on retrouve le processus ARCH (q), et lorsque $p = q = 0$, on aboutit simplement à un bruit gaussien.

Méthode d'estimation du modèle GARCH

La log vraisemblance du modèle s'écrit :

$$\ln(L_\Theta) = \sum_{t=1}^m \frac{1}{2} \left(\ln(2\pi) + \ln \sigma_t(\Theta) + \frac{(y_t - \mu)^2}{\sigma_t^2} \right) \quad (2.6)$$

Le tableau 2.4, respectivement 2.5, présente les estimations du modèle GARCH (1, 1) pour l'indice JALSH, respectivement NGSE.

Significativité des coefficients

Les tables 2.4 et 2.5 proposent les 't-value' et les probabilités associées dans le cadre d'un test de Student Student [1908]. Il s'agit des probabilités de rejeter à tort H0 qui correspond ici à l'hypothèse selon laquelle les coefficients sont tous nuls. Le test de Student permet ainsi d'évaluer la significativité individuelle des coefficients.

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
μ	8.045e-04	1.317e-04	6.107	1.01e-09 ***
a_0	1.771e-06	3.743e-07	4.732	2.23e-06 ***
α_1	1.036e-01	9.173e-03	11.290	< 2e - 16 ***
β_1	8.889e-01	9.443e-03	94.139	< 2e - 16 ***
Log L	15 267.89			

TABLE 2.4 – Estimations de GARCH (1, 1) pour l'indice sud-africain JALSH

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
μ	-4.732e-05	1.018e-04	-0.465	0.64203
a_0	7.139e-07	2.690e-07	2.654	0.00796 **
α_1	1.883e-01	1.577e-02	11.941	< 2e - 16 ***
β_1	8.387e-01	1.407e-02	59.629	< 2e - 16 ***
Log L	13 735.63			

TABLE 2.5 – Estimations de GARCH (1, 1) pour l'indice nigérian NGSE

Concernant l'indice sud-africain, l'on peut remarquer que les coefficients du modèle GARCH sont significatifs et que l'hétéroscédasticité est bien captée. Par contre le test de Student ne valide pas, avec un seuil de 5%, la non nullité de la constante μ , pour l'indice nigérian. Cela dit, la constante est estimée à $-4.7332 \cdot 10^{-5}$ qui est proche de 0. Nous pouvons donc relativement conclure à la validation des coefficients du modèle pour les deux indices.

2.2.3 Modèle E-GARCH

Proposé par Nelson [1991], le processus Exponentiel GARCH ou E-GARCH (p, q) est une variante du processus GARCH.

Ce processus donne à la variance conditionnelle, la définition suivante :

$$y_t = \mu + \sigma_t \epsilon_t \quad (2.7)$$

avec

$$\ln(\sigma_t^2) = a_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i g(y_{t-i} - \mu) + \sum_{j=1}^p \beta_j \ln(\sigma_{t-j}^2) \quad (2.8)$$

avec la fonction g vérifie (en posant $z_{t-i} = y_{t-i} - \mu$) :

$$g(z_{t-i}) = \theta z_{t-i} + (|z_{t-i}| - E|z_{t-i}|) \quad (2.9)$$

On s'assure ainsi de la positivité de la variance.

Méthode d'estimation du modèle E-GARCH

La log vraisemblance écrite à l'équation 2.6 reste valable ici.

L'estimation sur l'indice JALSH (respectivement NGSE) donne les résultats présentés dans le tableau 2.6 (respectivement 2.7).

Significativité des coefficients

Le test de Student confirme que les cinq coefficients du modèle E-GARCH sont significatifs pour l'indice nigérian, pour un seuil de 5%. Cette conclusion semble moins immédiate pour l'indice sud-africain, relativement à la constante μ avec une p-value à 0.058785, donc supérieure à 5%.

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
μ	0.000411	0.000218	1.8898	0.058785
a_0	-0.165985	0.009455	-17.5547	0.000000
α_1	-0.068228	0.008260	-8.2600	0.000000
β_1	0.982033	0.001039	945.3478	0.000000
θ	0.172054	0.015551	11.0640	0.000000
Log L	15 066.05			

TABLE 2.6 – Estimations de EGARCH (1, 1) pour l'indice sud-africain JALSH

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
μ	-0.000556	0.000080	-6.9243	0.0e+00
a_0	-0.440251	0.107712	-4.0873	4.4e-05
α_1	0.048243	0.013059	3.6944	2.2e-04
β_1	0.954059	0.011262	84.7128	0.0e+00
θ	0.445372	0.042908	10.3796	0.0e+00
Log L	13 732.42			

TABLE 2.7 – Estimations de EGARCH (1, 1) pour l'indice nigérian NGSE

2.3 Quid de l'efficience des marchés financiers africains subsahariens ?

Définition de l'efficience

L'on doit les premiers travaux sur l'efficience des marchés financiers à [Samuelson \[1965\]](#) qui suggéra que les prix des actifs financiers étaient gouvernés par une marche aléatoire et donc que les rendements étaient entièrement imprévisibles. [Fama \[1965\]](#) donne la définition suivante : un marché financier est dit efficace si et seulement si l'ensemble des informations disponibles concernant chaque actif financier coté sur ce marché est immédiatement intégré dans le prix de cet actif.

Il vient naturellement l'écriture suivante :

$$E[S(t+1)|I(t)] = S(t) \quad (2.10)$$

$I(t)$ étant l'information disponible à la date t .

Dans le sillage de [Fama \[1965\]](#), en 1978, [Jensen](#) propose la définition suivante :

*Sont maintenant réputés efficaces, les marchés sur lesquels les prix d'un actif coté intègrent les informations le concernant de telle manière qu'un investisseur ne peut, en achetant ou en vendant cet actif, en tirer un profit supérieur aux coûts de transactions engendrés par cette action*¹.

Pour cela, les conditions suivantes devraient être réunies :

1. [Higgins \[1991\]](#) : "L'efficience du marché est une description de la réaction des prix aux nouvelles informations. L'arrivée d'une nouvelle information peut être comparée à l'arrivée d'une côtelette d'agneau au milieu d'un banc de piranhas affamés, les piranhas figurant les investisseurs. Au moment où la côtelette effleure la surface de l'eau, celle-ci est soudainement agitée par les piranhas qui dévorent la viande. Très rapidement cependant, celle-ci disparaît et la surface redevient paisible. De même, quand une nouvelle information atteint un marché concurrentiel, ceci est soudainement rempli de tumulte créé par les investisseurs qui, prenant en compte la nouvelle information est comme un os sans viande. Aucun rongement supplémentaire ne permettra d'obtenir plus de viande, et aucune analyse supplémentaire de la nouvelle n'apportera d'information supplémentaire exploitable avec profit"

- atomicité : aucun agent ne détient une part de marché suffisante lui permettant d'influer sur les prix par ses seules transactions.
- liquidité : un agent doit pouvoir opérer très rapidement et de façon conséquente sur le marché (acheter et vendre) sans que cela n'induit une forte variation des prix.

La littérature recense trois formes d'efficience :

- efficience faible : l'ensemble des informations disponibles comprend uniquement l'historique de la série des prix et des rentabilités.
- efficience semi-forte :
 - l'information disponible inclut, en plus des statistiques précédentes, n'importe quel renseignement rendu public (les résultats comptables, les augmentations de capital...)
 - les informations disponibles sont intégrées dans le prix de l'actif à l'instant même où elles sont rendues publiques.
 - il est impossible de réaliser un profit sur la base des informations publiques et disponibles.
- efficience forte :
 - les cours reflètent même l'information privée détenue par les agents
 - implique que l'utilisation de ces informations privilégiées n'est pas susceptible d'aider à la prévision des cours.

L'analyse précédente sur la théorie de la marche aléatoire nous avait amené à conclure que les prix des actifs sur les marchés financiers étudiés étaient prévisibles. Rejetant donc l'hypothèse de la marche aléatoire, conjointement celle de l'indépendance des résidus de la régression définie au 2.2.1.1, nous aboutissons au rejet de l'hypothèse d'efficience au sens faible. Cela rejoint les conclusions de [Alagidede and Panagiotidis \[2009\]](#) et [Magnusson and Wydick \[2000\]](#).

Sur la base des estimations et des tests sur les modèles de type GARCH et E-GARCH, nous avons noté que les différentes constantes sont significativement non nulles. Les différents tests laissent donc penser que l'information passée a un impact sur l'information présente et future et qu'il est possible pour un investisseur de "battre" le marché, infirmant la définition de l'efficience de [Jensen \[1978\]](#).

2.4 Nouvelle approche de modélisation : processus à changement d'états

Cette section aborde la modélisation avec changement de régimes des indices africains considérés.

La présentation reprendra certains points de [Hamilton \[1994\]](#) et [Kim \[1994\]](#) et sera également inspirée de [Hardy \[2003\]](#) et [Aïnou \[2013\]](#).

2.4.1 Contexte

Les modèles à changement de régimes ont été introduits par [Quandt \[1958\]](#) et [Goldfeld and Quandt](#) en [1973]. Ces modèles ont, plus tard, été améliorés par [Hamilton](#) en 1979 qui les utilisa pour décrire des changements structurels de données temporelles dans une économie non stationnaire (par opposition à une économie stationnaire dans laquelle la richesse et le revenu des individus restent inchangés). [Hamilton and Susmel \[1994\]](#) étendent ce modèle à plusieurs régimes avec des coefficients auto régressifs. Depuis, plusieurs variétés

de modèles ont été utilisés en actuariat pour capter les caractéristiques de non-normalité présentées, par les prix d'actifs financiers (Hardy 2001) et les produits dérivés tels que les options [Naik, 1993, Bollen, 1998, Boyle and Draviam, 2007, etc]. Ils sont également présents dans la modélisation du risque de crédit [Siu et al., 2008].

Ainsi construits, les processus RS sont des processus de type markovien à variables d'état cachées (HMM)². Les probabilités de transition entre différents régimes p_{ij} (régimes i, j) sont obtenus à partir de la probabilité du régime conditionnel. Ainsi plus cette probabilité est élevée, plus l'effet du choc sera de courte durée.

2.4.2 Rappel sur les chaînes de Markov à nombre fini d'états

Nous commençons par présenter un exemple typique. Je reviens ici sur un exemple typique rappelé par Monsieur Fromenteau et adapté pour la rédaction de ce mémoire. Considérant un petit babouin qui saute de liane en liane, quelle serait la probabilité qu'il ait rejoint la liane 4 au bout du 5^e saut, sachant qu'au temps 0 il est sur la liane 1 ? La réponse sera donnée à la suite de la définition formelle qui suit.

On se place sur un espace de probabilité (Ω, F, \mathbf{P}) . Par convention, l'on supposera que toute probabilité conditionnelle est non nulle.

Definition *Le processus stochastique $(\delta_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans $U = \{1, \dots, e\}$, ensemble fini, ou dénombrable est une chaîne de Markov, si $\forall m \in \mathbf{N}, \forall \delta_1, \dots, \delta_m, c \in U = \{1, \dots, e\}$,*

$$\mathbf{P}(\delta_{m+1} = c | \delta_1, \dots, \delta_m) = \mathbf{P}(\delta_{m+1} = c | \delta_m) \quad \square$$

La chaîne de Markov $(\delta_t)_{t \geq 1}$ à valeurs dans $U = \{1, \dots, e\}$ est définie par :

- i) une loi initiale $\rho_0(j) = P(\rho_0 = j)$ (la loi de δ_1), pour $j = 1, \dots, e$ et tel que $\sum_{j=1}^e \rho_0(j) = 1$
- ii) une matrice de probabilités de transition telle que :

$$M = \begin{pmatrix} p(1, 1) & \dots & p(1, e) \\ & \ddots & \\ p(e, 1) & \dots & p(e, e) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} p(i, j) &= P(\delta_t = j | \delta_{(t-1)} = i) \\ &= P(\delta_t = j | \delta_{(t-1)} = i, \dots, \delta_0 = e_0) \end{aligned}$$

pour tout $e_0 \in U$.

Enfin, un processus $(y_t)_{t \geq 1}$ est dit à chaîne de Markov cachée si :

- i) les observations y_0, \dots, y_t sont indépendantes conditionnellement à une chaîne de Markov non observée $(\delta_t)_{t \geq 1}$
- ii) la loi de $y_r | \delta_t$ ne dépend que de δ_r .

2. HMM : Hidden Markov Model

Réponse à l'exemple

En nous référant à la définition supra, la probabilité de l'événement de l'exemple donné en introduction, revient à déterminer $(M^5)_{14}$. Il s'agit de l'élément à l'intersection de la première ligne et de la quatrième colonne de la matrice M puissance 5.

Concentrons nous à présent sur la méthodologie d'estimation des paramètres d'un processus à changement de régimes.

2.4.3 Méthode d'estimation des paramètres d'un processus à changement d'états log-normal

Filtre de Hamilton (t à t+1)

Nous présenterons deux approches qui diffèrent par le caractère observable ou non des états de la nature pris par le processus $(y_t)_{t \geq 1}$.

Commençons préalablement par définir la vraisemblance du modèle à changement de régimes, sachant que la distribution de chaque régime est supposée log-normale.

Hamilton [1979], fut l'un des premiers à introduire les chaînes de Markov latentes dans la littérature économétrique. Posons :

$$\rho_{t|s} = \begin{pmatrix} P(\delta_t = 1 | y_s, \dots, y_1) \\ \vdots \\ P(\delta_t = e | y_s, \dots, y_1) \end{pmatrix}$$

où e correspond au nombre d'états de la nature et désignons par $\phi(y_t) = (\phi_1(y_t), \phi_2(y_t), \dots, \phi_e(y_t))$. On peut écrire :

$$\rho_{t|t}(j) = P(\delta_t = j | y_t, \dots, y_1) = \frac{\phi_j(y_t) P(\delta_t = j | y_{t-1}, \dots, y_1)}{f_t(y_t | y_{t-1}, \dots, y_1)} \quad (2.11)$$

tel que

$$f_t(y_t | y_{t-1}, \dots, y_1) = \sum_{j=1}^e \phi_j(y_t) \rho_{t|t-1}(j)$$

avec

$$\phi_j(y_t) = \frac{1}{\sigma(j)\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(y_t - \mu(j))^2}{2\sigma^2(j)} \right\}$$

En notant \odot le produit matriciel d'Hadamard, et ρ la valeur initiale, on a :

$$\rho_{t|t} = \frac{\rho_{t|t-1} \odot \phi(y_t)}{\sum_{j=1}^e \phi_j(y_t) \rho_{t|t-1}(j)}$$

Par suite, la vraisemblance s'écrira :

$$L_{\Theta} = \sum_{t=1}^m f_t(y_t | y_{t-1}, \dots, y_1)$$

d'où la log-vraisemblance :

$$\ln L_{\Theta}(y_1, \dots, y_m) = \sum_{j=1}^e \ln f_t(y_t | y_{t-1}, \dots, y_1)$$

Maximisation de la log-vraisemblance

États de la nature observables

Étant donné le postulat que les états sont observables, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \ln L_{\Theta, \rho_0}(y_1, \dots, y_m, \delta_1, \dots, \delta_m) &= \sum_{t=1}^m \ln \phi_{\delta_t}(y_t) + \ln \rho_0(\delta_1) \\ &+ \sum_{t=2}^m \ln p(\delta_{t-1}, \delta_t) \\ &= \lambda_1(\mu, \sigma) + \lambda_2(\rho_0) + \lambda_3(P) \end{aligned} \quad (2.12)$$

On obtient :

$$\hat{\mu}(j) = \frac{1}{\sum_{t=1}^m \mathbf{1}_{(\delta_t=j)}} \sum_{t=1}^m y_t \mathbf{1}_{(\delta_t=j)} \quad (2.13)$$

$$\hat{\sigma}^2(j) = \frac{1}{\sum_{t=1}^m \mathbf{1}_{(\delta_t=j)}} \sum_{t=1}^m (y_t - \mu(j))^2 \mathbf{1}_{(\delta_t=j)} \quad (2.14)$$

La maximisation de $\lambda_2(\rho_0)$ en $\rho_0(1), \dots, \rho_0(e)$ sous la contrainte $\sum_{j=1}^e \rho_0(j) = 1$, aboutit à :

$$\rho_0(j) = \mathbf{1}_{(\delta_1=j)} \quad (2.15)$$

Sous la contrainte, $\sum_{j=1}^e p(i, j) = 1$, on obtient par maximisation de $\lambda_3(P)$:

$$p(\hat{i}, j) = \frac{1}{\sum_{t=2}^m \mathbf{1}_{(\delta_t=i)}} \sum_{t=2}^m \mathbf{1}_{(\delta_{t-1}=i, \delta_t=j)}$$

Ces formules, bien qu'élégantes, ne sont pas exploitables directement, étant donné que nul ne connaît l'état de la nature à la date t donc δ_t .

Nous détaillons dans le paragraphe qui suit, l'algorithme de type EM (Espérance Maximisation).

États de la nature non-observables

L'algorithme EM, permet en réalité, d'alterner les étapes E et M. En effet à l'étape E, on évalue l'espérance de la vraisemblance, étant donnée la valeur courante du paramètre, et l'étape M correspond à la maximisation de la log-vraisemblance définie à l'étape E.

Étape E

Nous supposons disposer des valeurs estimées à la k ième étape d'itération, de $\Theta^{(k)}$ et $\rho_0^{(k)}$, respectivement de Θ et ρ_0 . La log-vraisemblance étant inconnue, comme justifiée précédemment, nous considérons plutôt son espérance comme approximation sachant les observations (y_1, \dots, y_m) . Cette espérance sera calculée sous la distribution de paramètre $(\Theta^{(k)}, \rho_0^{(k)})$.

Le critère suivant s'obtient :

$$\begin{aligned} C(\Theta, \rho_0 | \Theta^{(k)}, \rho_0^{(k)}) &= E_{\Theta^{(k)}, \rho_0^{(k)}} (\ln L_{\Theta, \rho_0}(y_1, \dots, y_m, \delta_1, \dots, \delta_m) | y_1, \dots, y_m) \\ &= \beta_1(\sigma) + \beta_2(\rho_0) + \beta_3(P) \end{aligned} \quad (2.16)$$

où

$$\beta_1(\mu, \sigma) = \sum_{j=1}^e \sum_{t=1}^m \ln \phi_j(y_t) P_{\Theta^{(k)}, \rho_0^{(k)}}(\delta_t = j | y_t, \dots, y_m) \quad (2.17)$$

$$\beta_2(\rho_0) = \sum_{j=1}^e \ln \rho_0(j) P_{\Theta^{(k)}, \rho_0^{(k)}}(\delta_1 = j | y_1, \dots, y_m) \quad (2.18)$$

$$\beta_3(P) = \sum_{i,j} \ln p(i, j) \sum_{t=2}^m P_{\Theta^{(k)}, \rho_0^{(k)}}(\delta_{t-1} = i, \delta_t = j | y_1, \dots, y_m) \quad (2.19)$$

Étape M

Il s'agit ici, de maximiser, suivant les paramètres (Θ, ρ_0) , la log-vraisemblance estimée $C(\Theta, \rho_0 | \Theta^{(k)}, \rho_0^{(k)})$ définie à l'équation 2.16.

La variance du régime j est obtenue par maximisation de l'équation 2.17 et aboutit à :

$$\hat{\sigma}^2(j) = \frac{\sum_{t=1}^m (y_t - \mu(j))^2 P_{\Theta^{(k)}, \rho_0^{(k)}}(\delta_t = j | y_1, \dots, y_m)}{\sum_{t=1}^m P_{\Theta^{(k)}, \rho_0^{(k)}}(\delta_t = j | y_1, \dots, y_m)} \quad (2.20)$$

On constate que cette variance estimée est la moyenne pondérée des y_t^2 centrés, par les probabilités conditionnelles de présence dans le régime j .

La moyenne suivant le régime j étant égale à :

$$\hat{\mu}(j) = \frac{\sum_{t=1}^m y_t \times \rho_{t|m}(j)}{\sum_{t=1}^m \rho_{t|m}(j)} \quad (2.21)$$

La probabilité initiale se déduit par maximisation de l'équation 2.18 :

$$\hat{\rho}_0(j) = P_{\Theta^{(k)}, \rho_0^{(k)}}(\delta_1 = j | y_1, \dots, y_m) \quad (2.22)$$

Quant aux probabilités de transition, elles sont estimées par la maximisation de l'équation 2.19

$$\hat{p}(i, j) = \frac{\sum_{t=2}^m P_{\Theta^{(k)}, \rho_0^{(k)}}(\delta_{t-1} = i, \delta_t = j | y_1, \dots, y_m)}{\sum_{t=2}^m P_{\Theta^{(k)}, \rho_0^{(k)}}(\delta_{t-1} = i | y_1, \dots, y_m)} \quad (2.23)$$

Cependant, le calcul des probabilités lissées :

$$\rho_{t-1|m}(j) = P_{\Theta^{(k)}, \rho_0^{(k)}}(\delta_t = j | y_1, \dots, y_m) \text{ tel que } 1 \leq j \leq e$$

et

$$\rho_{t-1,t|m}(i, j) = P_{\Theta^{(k)}, \rho_0^{(k)}}(\delta_{t-1} = i, \delta_t = j | y_1, \dots, y_m) \text{ avec } 1 \leq i, j \leq e \quad (2.24)$$

est nécessaire pour l'estimation de 2.20, 2.22 et 2.23.

Détermination des probabilités lissées : passage de t à $t - 1$

On calcule, pour chaque date t , la probabilité de migration d'un état à un autre, conditionnellement à l'ensemble des observations disponibles.

Le calcul de 2.24 donne :

$$\begin{aligned} \rho_{t-1,t|m}(i, j) &= P_{\Theta^{(k)}, \rho_0^{(k)}}(\delta_{t-1} = i, \delta_t = j | y_1, \dots, y_m) \\ &= P_{\Theta^{(k)}, \rho_0^{(k)}}(\delta_{t-1} = i | \delta_t = j, y_1, \dots, y_m) \times P_{\Theta^{(k)}, \rho_0^{(k)}}(\delta_t = j | y_1, \dots, y_m) \end{aligned}$$

Selon la propriété caractéristique simple de Markov³, nous pouvons écrire la relation immédiate suivante :

3. De manière informelle, cette propriété fondamentale spécifie que pour une chaîne de Markov, les états futurs de la chaîne ne dépendent de ses états passés que par l'état présent. Dans notre cas précis, sachant l'état présent, les observations futures n'apportent aucune information sur l'état précédent

$$P_{\Theta^{(k)}, \rho_0^{(k)}}(\delta_{t-1} = i | \delta_t = j, y_1, \dots, y_m) = P_{\Theta^{(k)}, \rho_0^{(k)}}(\delta_{t-1} = i | \delta_t = j, y_1, \dots, y_{t-1}) \quad (2.25)$$

Il vient que :

$$\begin{aligned} \rho_{t-1, t|m}(i, j) &= P_{\Theta^{(k)}, \rho_0^{(k)}}(\delta_{t-1} = i | \delta_t = j, y_1, \dots, y_{t-1}) \times P_{\Theta^{(k)}, \rho_0^{(k)}}(\delta_t = j | y_1, \dots, y_m) \\ &= \frac{P_{\Theta^{(k)}, \rho_0^{(k)}}(\delta_t = j, \delta_{t-1} = i | y_1, \dots, y_{t-1})}{P_{\Theta^{(k)}, \rho_0^{(k)}}(\delta_t = j | y_1, \dots, y_{t-1})} \times \rho_{t|m}(j) \\ &= \frac{P_{\Theta^{(k)}, \rho_0^{(k)}}(\delta_t = j | \delta_{t-1} = i, y_1, \dots, y_{t-1}) \times P_{\Theta^{(k)}, \rho_0^{(k)}}(\delta_{t-1} = i | y_1, \dots, y_{t-1})}{P_{\Theta^{(k)}, \rho_0^{(k)}}(\delta_t = j | y_1, \dots, y_{t-1})} \\ &\quad \times \rho_{t|m}(j) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Ensuite, se servant de la formule des probabilités totales, nous déduisons facilement :

$$\rho_{t-1|m}(i) = \sum_{j=1}^e \rho_{t-1, t|m}(i, j) = \sum_{j=1}^e \frac{p(i, j) \rho_{t-1|t-1}(i) \rho_{t|m}(j)}{\rho_{t|t-1}(j)} \quad (2.27)$$

Preuve

Justifications des 2.20 et 2.23

Le terme β_1 à l'équation 2.17 peut se récrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \beta_1(\mu, \sigma) &= \sum_{j=1}^e \sum_{t=1}^m \ln \phi_j(y_t) P_{\Theta^{(k)}, \rho_0^{(k)}}(\delta_t = j | y_1, \dots, y_m) \\ &= \sum_{j=1}^e \sum_{t=1}^m \ln \left(\frac{1}{\sigma(j) \sqrt{2\pi}} \times \exp \left\{ -\frac{(y_t - \mu(j))^2}{2\sigma^2(j)} \right\} \right) P_{\Theta^{(k)}, \rho_0^{(k)}}(\delta_t = j | y_1, \dots, y_m) \\ &= \sum_{j=1}^e \sum_{t=1}^m \left\{ -\frac{1}{2} \ln(2\pi) - \ln(\sigma(j)) - \frac{(y_t - \mu(j))^2}{2\sigma^2(j)} \right\} P_{\Theta^{(k)}, \rho_0^{(k)}}(\delta_t = j | y_1, \dots, y_m) \end{aligned}$$

La dérivée de cette quantité par rapport à μ et σ donne respectivement :

$$\hat{\mu}(j) = \frac{\sum_{t=1}^m y_t \times \rho_{t|m}(j)}{\sum_{t=1}^m \rho_{t|m}(j)}$$

et

$$\hat{\sigma}^2(j) = \frac{\sum_{t=1}^m (y_t - \mu(j))^2 P_{\Theta^{(k)}, \rho_0^{(k)}}(\delta_t = j | y_1, \dots, y_m)}{\sum_{t=1}^m P_{\Theta^{(k)}, \rho_0^{(k)}}(\delta_t = j | y_1, \dots, y_m)}$$

Justification de 2.23

La quantité 2.19 peut se récrire en tenant compte de la relation 2.27 :

$$\begin{aligned} \beta_3(P) &= \sum_{i,j} \ln p(i, j) \sum_{t=2}^m P_{\Theta^{(k)}, \rho_0^{(k)}}(\delta_{t-1} = i, \delta_t = j | y_1, \dots, y_m) \\ &= \sum_{i,j} \sum_{t=2}^m \ln p(i, j) \times \rho_{t|m}(j) \times \frac{p(i, j) \rho_{t-1|t-1}(i) \rho_{t|m}(j)}{\rho_{t|t-1}(j)} \end{aligned}$$

L'annulation des dérivés partielles par rapport à $p(i, j)$ et la contrainte : $\sum_{j=1}^e p(i, j) = 1$ conduisent au résultat :

$$\hat{p}(i, j) = \frac{\sum_{t=2}^m P_{\Theta^{(k)}, \rho_0^{(k)}}(\delta_{t-1} = i, \delta_t = j | y_1, \dots, y_m)}{\sum_{t=2}^m P_{\Theta^{(k)}, \rho_0^{(k)}}(\delta_{t-1} = i | y_1, \dots, y_m)} \quad \square$$

Les probabilités filtrées et lissées des indices nigérian et sud-africain sont présentées sur les graphiques 2.8, 2.10 et 2.7, 2.9. Nous avons également reproduit sur le graphique 2.9 le cours de l'indice JALSH.

Les paramètres issus du lissage sont consultables dans le tableau 2.8. L'on peut remarquer que les probabilités stationnaires sont assez similaires, de même que les volatilités dans le régime à forte volatilité. De façon générale les volatilités de l'indice sud-africain sont supérieures à celles de l'indice nigérian comme attendu, la volatilité quotidienne historique du premier étant supérieure à celle du deuxième. Par ailleurs, les probabilités de persistance dans les régimes sont de 3% supérieures pour le régime 1 et 7% supérieures pour le régime 2 de l'indice sud-africain relativement à l'indice nigérian. Les deux indices vus isolément permettent de noter que les probabilités de persistance dans le régime à faible volatilité sont plus importantes que celle de persistance dans le régime 2, bien qu'elle soit moins marquée pour l'indice sud-africain.

A la lumière des graphiques 2.10 et 2.9, on identifie aisément une alternance de régimes au Nigéria comme en Afrique du Sud. Il apparaît clairement que l'indice nigérian est régulièrement dans le régime à forte volatilité, bien plus que l'indice sud africain. De manière contre intuitive, les paramètres calibrés pour le Nigéria, laissent apparaître un régime à forte volatilité associé à des rendements positifs comme le suggère le tableau 2.8. Il est pourtant bien plus naturel d'anticiper des rendements globalement négatifs associés à des périodes d'incertitude. L'identification des régimes ne semble donc pas très immédiate dans le contexte nigérian. L'explication de ce constat pourrait résider dans la maturité de ces deux marchés et de leur importance. Il est donc intéressant de rappeler que le marché sud-africain est le plus stable de la zone africaine subsaharienne. On remarque que l'indice sud-africain JALSH affiche une présence dans le régime à forte volatilité pendant la crise des *subprimes* (Voir 2.9 fin 2008 - début 2009).

Par ailleurs, dans le cas de l'Afrique du Sud, l'identification des faits stylisés semble effective. Nous entendons par faits stylisés, les propriétés statistiques communes telles que l'autocorrélation d'ordre 1 ou encore le *skewness*. En effet, la différence des moyennes dans les 2 régimes le démontre (voir table 2.8).

Paramètres	Indice NGSE	Indice JALSH
μ_1	0.0041%	0.0924%
μ_2	0.1204%	-0.0725%
σ_1	0.5208%	0.8130%
σ_2	1.8001%	1.9619%
p_{11}	96.0088%	98.6503%
p_{22}	89.9269%	96.5084%
π_1	71.6216%	72.1216%
π_2	28.3784%	27.8784%
$\log L$	14 318.0505	15 481.0752

TABLE 2.8 – Paramètres lissés issus du calibrage du modèle à changement de régimes log-normal

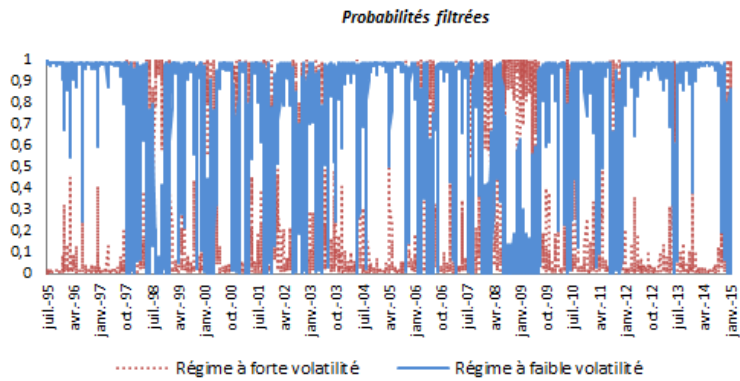


FIGURE 2.7 – Changement de régimes log-normal de l'indice sud-africain (1995-2015) JALSH - probabilités filtrées

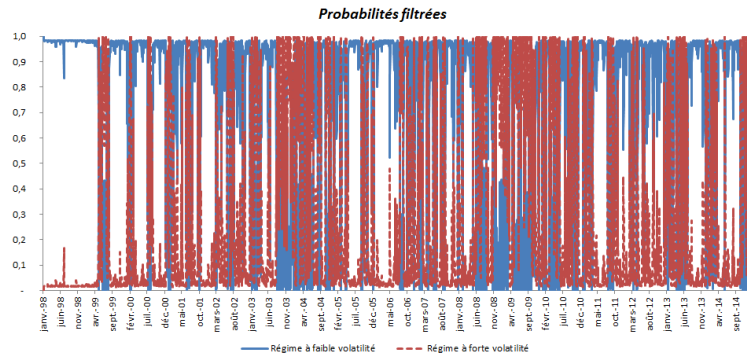


FIGURE 2.8 – Changement de régimes log-normal de l'indice nigérian (1998-2015) NGSE - probabilités filtrées

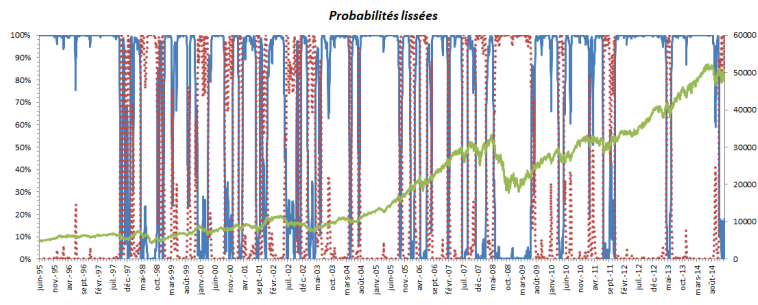


FIGURE 2.9 – Changement de régimes log-normal de l'indice sud-africain (1995-2015) JALSH - probabilités lissées

2.4.4 Une propriété intéressante et utile des processus à changement de régimes

Supposons que nous disposons d'un indice annuel $S(t)$ et qu'on note y_t le logarithme du rendement sur l'intervalle $[t, t + 1]$, soit :

$$y_t = \ln \left(\frac{S(t+1)}{S(t)} \right)$$

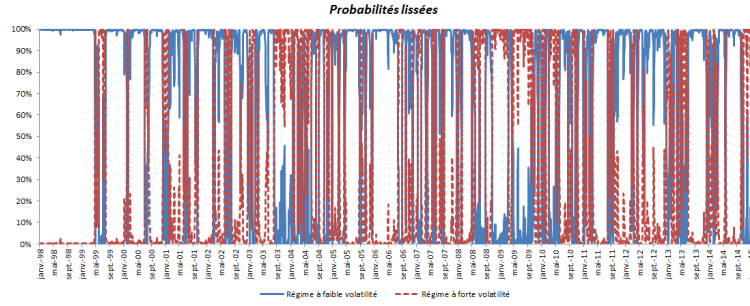


FIGURE 2.10 – Changement de régimes log-normal de l'indice nigérian (1998-2015) NGSE - probabilités lissées

Supposons que y_t se comporte comme un processus markovien à 2 régimes : $\delta_t = 1$ ou 2. On a donc :

$$y_t = \begin{cases} {}^1y_t & \text{si } \delta_t = 1 \\ {}^2y_t & \text{si } \delta_t = 2 \end{cases} \quad (2.28)$$

Dans cette dernière équation $\delta_t y_t$ indique la présence du processus dans le régime δ_t entre t et $t + 1$. La matrice de transition s'écrit comme suit :

$$M = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

où $p_{ij} = Pr[\delta_{t+1} = j | \delta_t = i]$ est la probabilité que le processus Y_t passe du régime i à la date t au régime j à la date $t + 1$ avec ($i = 1, 2$ et $j = 1, 2$). Pour la détermination de ces paramètres on utilisera la méthode du maximum de vraisemblance. Appelons Θ le vecteur des paramètres à déterminer. A présent supposons que le processus y_t est un processus suivant une distribution log-normale. Ainsi :

$$y_t / \delta_t \sim N(\mu_{\delta_t}, \sigma_{\delta_t}^2)$$

avec μ_i, σ_i^2 sont les paramètres de la loi du régime i . Par suite, le vecteur Θ est un vecteur à 6 paramètres :

$$\Theta = \{\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, p_{12}, p_{21}\}$$

Fonction de probabilité du séjour total en régime 1 Nous reprenons ici la présentation de Hardy [2003]⁴.

Soit K_n le nombre total de périodes (exprimée en jour, mois ou année) passées en régime 1 pour un processus $\{S(t)\}_{t=1}^n$, alors $K_n \in \{0, 1, \dots, n\}$. On veut évaluer la probabilité $P[K_n = k] = p_n(k)$. Notons $K_n(t)$, le temps total de séjour en régime 1 dans l'intervalle de temps $[t, n[$. A partir de ces notations on obtient pour les probabilités de transition, les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} P[K_n(n-1) = 0 | \delta_{t-1} = 1] &= p_{1,2} \\ P[K_n(n-1) = 1 | \delta_{t-1} = 1] &= p_{1,1} \\ P[K_n(n-1) = 0 | \delta_{t-1} = 2] &= p_{2,2} \\ P[K_n(n-1) = 1 | \delta_{t-1} = 2] &= p_{2,1} \end{aligned}$$

4. Investment Guarantees : Modeling and Management For Equity-Linked Insurance. page 33

A partir des relations précédentes, on peut écrire :

$$P[K_n(n-3) = k | \delta_{t-1}] = p_{\delta_{t-1},1} P[K_n(n-2) = k-1 | \delta_t = 1] + p_{\delta_{t-1},2} P[K_n(n-2) = k | \delta_t = 2] \quad (2.30)$$

Ce qui nous conduit à la relation de récurrence suivante :

$$P[K_n(t) = k | \delta_{t-1}] = p_{\delta_{t-1},1} P[K_n(t+1) = k-1 | \delta_t = 1] + p_{\delta_{t-1},2} P[K_n(t+1) = k | \delta_t = 2] \quad (2.31)$$

Cette expression récursive nous permet de déterminer les fonctions de probabilité de R_0 conditionnel au régime 1 comme point de départ, soit $P[K_n(0) = k | \delta_{-1} = 1]$. De même on peut déterminer $P[K_n(0) = k | \delta_{-1} = 2]$. Une fois connues les probabilités précédentes, on a à présent :

$$p_n(k) = \pi_1 P[K_n(0) = k | \delta_{-1} = 1] + \pi_2 P[K_n(0) = k | \delta_{-1} = 2]$$

avec $\pi_1 = \frac{p_{2,1}}{p_{1,2} + p_{2,1}}$ et $\pi_2 = 1 - \pi_1$. On note $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ la distribution de probabilité inconditionnelle du processus de Markov.

A partir de la relation $y_t = \ln\left(\frac{S(t+1)}{S(t)}\right)$ et en définissant q_n comme étant le rendement accumulé à l'instant n , soit $S(n) = \exp\left(\sum_{t=1}^n y_t\right)$, on a :

$$S(n) | K_n \sim LN(\mu^*(K_n), \sigma^*(K_n)) \text{ avec} \quad (2.32)$$

$$\mu^*(K_n) = K_n \mu_1 + (n - K_n) \mu_2 \text{ et } \sigma^*(K_n) = \sqrt{K_n \sigma_1^2 + (n - K_n) \sigma_2^2}$$

Preuve

Sachant que K_n définit le temps passé par le processus y_t en régime 1, $(n - K_n)$ représente donc le temps passé en régime 2. On a $\sum_{t=1}^n y_t | K_n$ est somme de :

- K_n variables aléatoires indépendantes de loi $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$
- $n - K_n$ variables aléatoires indépendantes de loi $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$

La somme de ces deux variables $(X_1 + X_2) | K_n$ est de même une variable aléatoire normale. On en déduit 2.32. □

Nous pouvons, à présent, définir la distribution de probabilité de $S(n)$:

$$F_{S(n)}(x) = P[S(n) \leq x] = \sum_{k=0}^n P[S(n) \leq x | K_n = k] p_n(k) \quad (2.33)$$

$$= \sum_{k=0}^n \Phi\left(\frac{\ln x - \mu^*(k)}{\sigma^*(k)}\right) p_n(k)$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Naturellement on peut définir la fonction de densité de $S(n)$. Il est donc facile de vérifier que :

$$f_{S(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sigma^*(k)} \phi\left(\frac{\ln x - \mu^*(k)}{\sigma^*(k)}\right) p_n(k) \quad (2.34)$$

avec ϕ la fonction de densité de la loi normale centrée réduite.

La connaissance de cette densité et de la distribution du processus à une date échéance T , permet, par exemple l'évaluation d'un call européen dès lors que la dynamique du sous-jacent est régi par un processus à changement de régime log-normal.

Cette propriété ainsi présentée sera exploitée dans le cadre du quatrième chapitre de ce mémoire consacré à l'évaluation de la prime de décote d'illiquidité.

2.5 Sélection de modèles

Nous étudierons dans cette section, quelques critères de sélection des modèles actions présentés dans le présent chapitre.

2.5.1 Critère d'Information d'Akaike

Akaike [1973] propose un critère de sélection qui s'applique aux modèles estimés par maximum de vraisemblance. Il définit donc le critère AIC, par :

$$AIC = \ln L - k \quad (2.35)$$

où L est la vraisemblance maximisée et k le nombre de paramètres dans le modèle considéré. De fait, la déviation du modèle $\ln L$ est pénalisée par le nombre de paramètres.

2.5.2 Critère d'Information de Bayes

Si l'on s'en tient simplement au critère de maximum de vraisemblance, il est assez naturel que le meilleur modèle sélectionné soit celui disposant du plus grand nombre de paramètres (donc de degré de liberté). Pour éviter cette problématique, nous devons constater que l'ajout d'un paramètre à un modèle conduit à un impact significatif. C'est donc en substance, tout l'intérêt que requiert le critère d'information de Bayes (BIC en anglais) Schwartz [1978] définit le critère suivant :

$$BIC = \ln L - \frac{1}{2}k \ln n \quad (2.36)$$

n étant la taille de données considérées.

Le tableau 2.9 présente les valeurs du critère d'Akaike pour les différents modèles étudiés. Les différents critères AIC et BIC tendent en analyse rapide à sélectionner le modèle à

Modèle	Log vraisemblance	Nombre de paramètres	AIC	BIC
Indice JALSH				
GARCH	15 267.89	4	15 263.89	15 250.90
EGARCH	15 066.05	5	15 061.05	15 044.82
Log-normale	8 670.95	2	8 668.95	8 662.46
RSLN	15 481.08	6	15 475.08	15 455.59
Indice NGSE				
GARCH	13 735.63	4	13 731.63	13 718.64
EGARCH	13 732.42	5	13 727.42	13 711.19
Log-normale	7 551.48	2	7 549.48	7 542.99
RSLN	14 318.05	6	14 312.05	14 292.57

TABLE 2.9 – Valeurs des critères d'information d'Akaike et de Bayes

changement de régimes log-normal au détriment des trois autres modèles présentés, car en effet, le modèle sélectionné correspond à celui qui maximise les deux critères. Clairement et comme attendu, le modèle lognormal est fortement discriminé.

De manière plus précise, on ne gagne rien à préférer le modèle EGARCH au modèle GARCH, car le dernier propose la meilleure logvraisemblance avec un nombre plus faible de paramètres à estimer. Par contre la préférence pour l'un des modèles GARCH ou RSLN

reste nuancée. Il est possible de préférer un modèle dont la vraisemblance est certes sensiblement plus faible qu'un autre mais dont le nombre de paramètres est moindre. Néanmoins, si nous devrions étudier la notion d'erreur de modèles, l'on pourrait être confronté à une sélection quasi systématique du modèle RSLN quand bien même l'écart de vraisemblance est faible avec le modèle GARCH.

Données

Les données sont tirées de Bloomberg pour les indices JALSH (indice sud-africain) et NGSE (indice nigérian).

2.6 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre un certain nombre d'outils quantitatifs. Notre souci, tout au long de la présente présentation est de proposer aux lecteurs, des méthodes récentes de modélisation, mais dans un contexte de marchés africains subsahariens. Nous focalisant particulièrement sur l'Afrique du Sud et le Nigéria, nous avons tenté d'étudier la question d'efficience de leur marché financier respectif.

Partant du constat que l'efficience, au sens faible, ne peut être retenue aux travers d'approches standards de modélisation, nous avons présenté une approche de modélisation basée sur la présence éventuelle de différents états de la nature dans l'évolution du cours d'indices boursiers. Nous avons effectué une description complète des modèles dits à chaînes de Markov cachés, tout en mettant un accent particulier sur la méthode d'estimation des paramètres, en apportant les justifications théoriques nécessaires.

Une application numérique nous a permis de mesurer l'intérêt de la prise en compte de différents états de la nature et de confronter cette approche à des modèles standards via des critères statistiques. Il apparaît notamment que le modèle à changement de régimes restitue convenablement les faits stylisés et semble permettre une bonne prédiction des régimes dans un contexte sud-africain. Pour le compte du Nigéria, l'analyse est plus nuancée, car quand bien même l'alternance de régimes est vérifiée, la quintessence justifiant la présence d'un régime à forte volatilité associé à une moyenne de rendement négative n'est pas exhibée.

D'autres approches de modélisation des log-rendements dans les régimes sont envisageables et peuvent faire l'objet d'extensions de la méthodologie présentée ici. Nous pouvons citer des processus à sauts de Kou, par exemple. Toutefois, les paramètres à estimer et la robustesse du calibrage seront des éléments d'appréciation déterminants de leur pertinence opérationnelle en particulier.

Chapitre 3

Évaluation du risque d'illiquidité : cas des marchés africains subsahariens

Contents

3.1	Introduction	58
3.2	Modélisation de la prime de décote d'illiquidité	59
3.2.1	Approche de Longstaff, 1995	60
3.2.1.1	Modélisation de l'option de vente	61
3.2.1.2	Application numérique	62
3.2.2	Approche de Ghaidarov, 2014	62
3.2.2.1	Modélisation de l'option de vente	63
3.2.2.2	Application numérique	65
3.3	Une Extension de la modélisation de la prime d'illiquidité	67
3.3.1	Choix d'une mesure d'évaluation	67
3.3.2	Modélisation et évaluation de l'option de vente	67
3.3.3	Application numérique	68
3.4	Conclusion	69

3.1 Introduction

Le présent chapitre est consacré à l'étude de l'illiquidité des marchés financiers étudiés. L'illiquidité est associée ici à la difficulté ou contrainte contractuelle d'incessibilité d'un actif.

La contrainte contractuelle peut s'effectuer via une clause stipulée dans le contrat proposé au souscripteur. Ce volet a été longuement abordé dans le mémoire Ramond [2009]. Il présente notamment quelques produits existants sur le marché et qui sont par nature incessibles tels que :

- les actions soumises à des clauses de restriction ou *lock up* comme les Attributions Gratuites d'Actions ou certaines actions adossées à de nouvelles cotations.
- les Bons de Souscription ou d'Acquisition d'Actions Remboursables (BSAAR).

Nous cherchons dans ce chapitre à mesurer l'impact de cotation d'une entreprise sur un marché financier africain subsaharien, donc de mesurer l'écart de prix des actions entre deux entreprises comparables mais dont l'une est cotée et l'autre non cotée. Ce contexte correspond également à celui des placements privés. En effet, les placements privés sont des opérations de financement à moyen ou long terme entre une entreprise cotée ou non et des investisseurs institutionnels. Un tel marché n'est pas encore clairement établi en Afrique du Sud par exemple mais devrait voir le jour dans la mesure où elle permet aux entreprises de diversifier leur source de financement et de lever davantage de fonds. Les deux plus gros marchés sont aujourd'hui les Etats Unis et l'Allemagne. En 2012, ce marché s'estimait à 54 milliards de dollars US, pour les Etats-Unis et 12 milliards d'Euros pour l'Allemagne¹. En France, ce marché créé en 2012 est intitulé **Euro PP** et est évalué à 4 milliards d'Euros en 2013. La charte Euro PP présente également les spécificités de ce type de placement :

- à la différence d'un financement de marché usuel par appel public à épargne, les opérations de placements privés n'entraînent pas d'obligations en matière de publication d'information, cette information restant dans le cadre bilatéral de la relation émetteur-investisseur.
- d'autre part, les opérations de placements privés se basent sur une documentation *ad hoc* négociée entre le créancier et ses investisseurs avec généralement la présence d'un intermédiaire.

Il est à noter que ce type de financement est principalement destiné aux entreprises de taille intermédiaire et aux petites et moyennes entreprises qui manifestent le souhait. A titre d'illustration nous proposons le graphique 3.1 qui présente l'évolution du marché Euro PP en France. L'illiquidité exprimée relativement aux notions présentées supra sera illustrée sur les marchés nigérian et sud-africain. Les volatilités des indices seront captées, dans une extension, par un processus à changement de régimes tel que présenté au chapitre 2. Nous proposons d'examiner cette notion d'illiquidité en se basant sur deux approches. La première étant attribuée à Longstaff [1995] et la deuxième à Ghaidarov [2014]. Le premier propose une borne supérieure, jugée excessive dans la littérature, à la prime d'illiquidité. Le deuxième tout en proposant également un majorant à la prime, suppose cependant que le cédant du titre l'effectue à une date future connue d'avance. D'un point de vue évaluation, la première approche considère toute la trajectoire du titre pendant la période de restriction alors que, dans la deuxième approche, seule une portion de la période sera utilisée. La deuxième approche implique implicitement que le détenteur du titre a la souplesse de spécifier le moment où l'illiquidité est établie.

1. Extrait de la charte des placements privés en France : <http://www.economie.gouv.fr/files/charte-europp-2014.pdf>

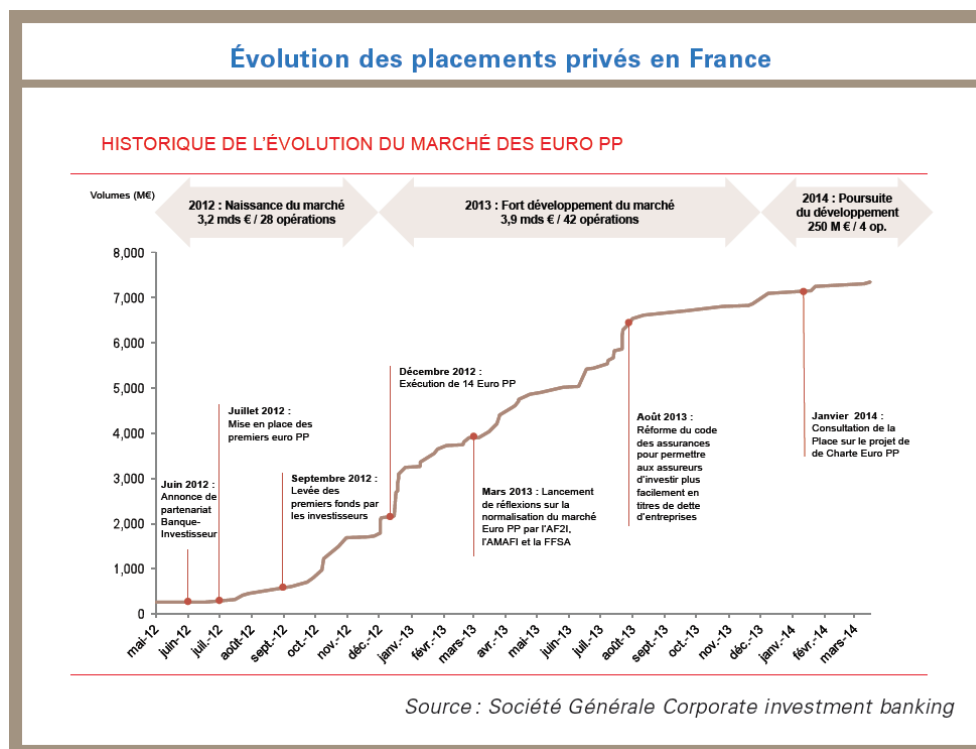


FIGURE 3.1 – Evolution du marché Euro PP en France

3.2 Modélisation de la prime de décote d'illiquidité

La décote d'illiquidité intervient dès lors qu'un actif est rendu inaccessible par les conditions de marché ou contractuellement ou lorsqu'il s'agit d'une relation bilatérale reposant sur une documentation ad hoc convenue entre emprunteur et investisseur. De même, comme le précise Raimbourg [2015], des sauts détectés dans la volatilité des marchés peuvent conduire à une relative illiquidité, rendant nécessaire l'intégration d'une décote d'incessibilité dans l'évaluation des actifs. Dans le contexte des marchés financiers de l'Afrique subsaharienne, cette notion de décote d'illiquidité est utile et peut devenir pertinente dans la mesure où elle devrait permettre de disposer d'une valorisation réaliste d'un investissement alternatif. Pour illustrer l'impact de la décote d'incessibilité, nous considérons que l'illiquidité est organisée via un support financier de type placement privé, mais son interprétation demeure similaire dans d'autres situations.

Cela étant, intégrer la prime d'illiquidité dans la valorisation des produits n'est pas sans difficulté, dès lors que l'hypothèse récurrente de liquidité des marchés devient obsolète. Il devient alors indispensable d'user de méthodes d'évaluations particulières. L'évaluation de la prime associée à cette notion de décote, s'obtient en assimilant la décote d'incessibilité à une option de vente européenne octroyant au détenteur le bénéfice d'éventuelles opportunités favorables pouvant se présenter avant terme. Longstaff [1995], dans son article séminale, propose de retenir une option *look back* sur maximum. Le prix d'exercice de ladite option se confond à la valeur maximale prise par le sous-jacent, pendant la période d'incessibilité. De fait, le gain est égal à la différence entre la valeur maximale du sous-jacent et le prix de l'action à la date d'échéance de l'option de vente. Cependant la prime obtenue est jugée excessive dans la littérature. En [2014], Ghaidarov, en modifiant l'approche de F. Longstaff, assimile la décote d'incessibilité à une option de vente à départ différé ou à démarrage futur. Cette approche permet d'aboutir à une prime moins importante contrairement à

l'hypothèse précédente.

Les deux prochaines sections s'attachent à présenter les deux approches décrites supra. La première reprendra la démarche initiée par Longstaff, pendant que dans la deuxième section, nous illustrerons la modification apportée par Ghaidarov. Une dernière section proposera une extension à l'approche de Ghaidarov, en considérant une modélisation du sous-jacent de type 'regime switching', telle que décrite à la section 2.4.

3.2.1 Approche de Longstaff, 1995

La prime dite d'illiquidité, ou parfois de liquidité, peut être vue comme une prime qu'exigerait tout investisseur dès lors qu'il est en présence d'un actif dont il estime que la cession serait difficile, soit en raison des conditions de marché, soit contractuellement. Il faudrait également noter que la plupart des investissements alternatifs contraignent, par définition, les investisseurs à la détention pendant une certaine période de certains actifs Staub [2010].

A l'origine de l'article Longstaff [1995], se trouve la faillite de plusieurs institutions financières qui étaient dans l'incapacité de céder des actifs afin de disposer de liquidités nécessaires à leur survie.

Dans son article, Longstaff propose une borne supérieure à la prime de décote d'inessibilité. Son étude permet également de mettre en lumière, la relation existant entre l'illiquidité d'un actif et la période d'inessibilité.

En effet, un investisseur contraint à une période d'inessibilité demandera en contrepartie une prime de décote. Ainsi, à défaut d'acheter un produit financier librement cessible à un prix $S(0)$, il l'acquerra plutôt, à une valeur supposée R . Il est lieu à présent de trouver un produit dérivé tel que la combinaison de l'actif illiquide et le payoff D , de ce dérivé majore le prix de l'actif facilement cessible, soit :

$$S(0) \leq R + D \tag{3.1}$$

Ainsi, il vient que

$$S(0) - R \leq D$$

Cette dernière équation traduit que le payoff D correspond à la borne supérieure de ce que l'on peut appeler "ajustement d'illiquidité" qui correspond à la différence entre le prix de l'actif cessible et celui du même actif supposé incessible temporairement.

De façon concrète, l'auteur propose d'assimiler la décote d'illiquidité à une option *look back* sur maximum dont le prix d'exercice n'est rien d'autre que la valeur maximale atteinte par le sous-jacent, observée sur une période donnée. Il en résulte que le gain correspond à l'écart entre cette valeur maximale et le prix du sous-jacent à la maturité de l'option. Pour justifier du choix, par Longstaff d'un dérivé de type option de vente, considérons le tableau 3.1 : La stratégie 1, présentée dans la première moitié du tableau 3.1, illustre un investisseur sans contrainte d'inessibilité, tandis que la stratégie 2, deuxième moitié du même tableau, décrit un investisseur contraint par un délai d'inessibilité. La quantité S désigne le prix de l'action librement cessible, alors que R correspond au prix de l'action si incessible. Par ailleurs, D désigne la fonction de payoff.

Description de la stratégie 1

Dans le cas 1, l'investisseur acquiert un actif au prix $S(0)$ en date 0 qu'il est libre de revendre à une date future t au prix de marché. Nous nous focalisons maintenant sur la stratégie 2 schématisée dans la deuxième moitié de la table 3.1.

Scénario	Cash flow à t = 0	Cash flow à une date t	Cash flow à la date T
Stratégie 1			
Achat de l'action	- S(0)		
Vente de l'action		+ S(t)	
Total	-S(0)	+ S(t)	0
Stratégie 2			
Achat de l'action	-R		
Vente de l'action			S(T)
Emprunt		+S(t)	
Remboursement			-S(t)e ^{r(T-t)}
Achat de l'option	-D		
Payoff de l'option			$\max_{0 \leq \tau \leq T} (K(T) - S(T))$
Total	- R - D	+S(t)	≥ 0

TABLE 3.1 – Stratégies selon l'approche de Longstaff

Description de la stratégie 2

Si nous supposons que cet actif est détenu par un investisseur qui se voit contraint de le garder jusqu'à un terme T , il aura pour valeur à cette date $S(T)$. Si par contre, l'investisseur fait preuve d'un *market timing* parfait, et qu'il a le droit de vendre l'actif à une date τ , tel que $0 \leq \tau \leq T$ et d'investir le cash flow associé au taux sans risque, la valeur de son portefeuille à la date T serait : $K(T) = \max_{0 \leq \tau \leq T} e^{r(T-\tau)} S(\tau)$. De fait, la restriction imposée à un investisseur, ne pouvant ainsi profiter des opportunités du marché, et la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage amènent à considérer la quantité $K(T) - S(T)$ comme le manque à gagner lié à l'illiquidité du sous-jacent. Ce manque à gagner est également fonction du *market timing* parfait de l'investisseur en cas d'absence de restriction lié à la vente du sous-jacent.

De fait la quantité $K(T) - S(T)$ peut être assimilée au payoff d'une option de vente dont le prix d'exercice est $K(T)$ tel que :

$$K(T) = \max_{0 \leq \tau \leq T} e^{r(T-\tau)} S(\tau) \quad (3.2)$$

La théorie financière permet, grâce à l'ensemble des techniques de valorisation recensées, de proposer un prix à cette option.

3.2.1.1 Modélisation de l'option de vente

Longstaff [1995] considère un processus brownien géométrique décrivant l'évolution du cours du sous-jacent, que nous notons S . Ainsi :

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB_t \quad (3.3)$$

avec μ et σ des constantes et B , un processus de Wiener. Supposons de même un taux sans risque plat noté r .

On constate bien évidemment, au regard de la dynamique du sous-jacent S , que le prix d'exercice $K(T)$ est stochastique. Par ailleurs, l'option telle que décrite, est toujours dans la monnaie dès lors que $K(T) \geq S(T)$, $\forall T$. Ce dernier aspect prélude à posteriori d'une prime élevée de l'option *look back*.

En notant que :

$$F(K(T), S(T), T) = \max(0, K(T) - S(T)) = K(T) - S(T) \quad (3.4)$$

un majorant à la prime d'inaccessibilité est la valeur actualisée en date 0, sous la probabilité risque neutre Q . Soit $P_0(K(T), S(T), T)$ cette valeur. On a naturellement donc :

$$\begin{aligned} P_0(K(T), S(T), T) &= e^{-rT} E_Q [F(K(T), S(T), T)] = e^{-rT} E_Q \{K(T) - S(T)\} \\ &= e^{-rT} E_Q[K(T)] - e^{-rT} E_Q[S(T)] \end{aligned} \quad (3.5)$$

Longstaff [1995] aboutit à une formule fermée pour l'équation 3.5, soit :

$$\begin{aligned} P_0(K(T), S(T), T) &= S(0) \left(2 + \frac{\sigma^2 T}{2} \right) \phi \left(\frac{\sqrt{\sigma^2 T}}{2} \right) \\ &\quad + S(0) \sqrt{\frac{\sigma^2 T}{2\pi}} \exp \left(-\frac{\sigma^2 T}{8} \right) - S(0) \end{aligned} \quad (3.6)$$

avec ϕ la fonction de densité de la loi normale standard.

L'annexe A donne une preuve complète de l'équation 3.6.

3.2.1.2 Application numérique

Le graphique 3.2 permet de visualiser l'évolution des primes d'illiquidité en fonction de la volatilité du sous-jacent. Il en ressort que la prime associée à cette option est relativement

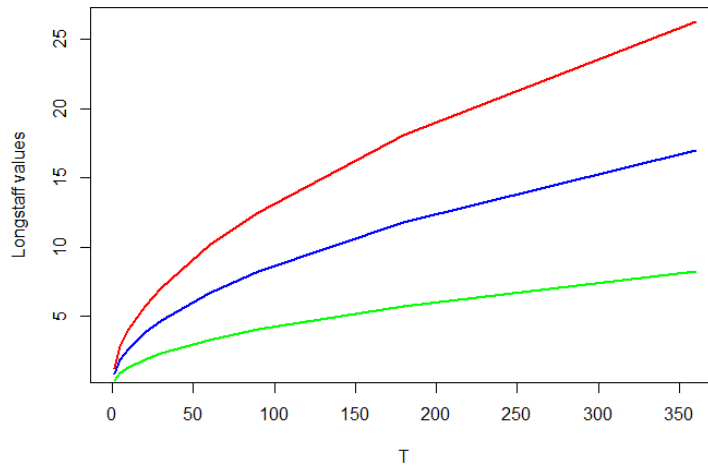


FIGURE 3.2 – Évolution des primes d'illiquidité en fonction de la volatilité et de la période d'inaccessibilité T exprimée en jours (En vert la courbe associée à $\sigma = 0.1$, en bleu $\sigma = 0.2$ et en rouge $\sigma = 0.3$.)

excessive et constitue le principal inconvénient, d'un point de vue *opérationnel*, de cette approche maximaliste. De même l'interprétation de la prime n'est pas très aisée car elle ne permet pas de s'enquérir du niveau effectif de la décote.

3.2.2 Approche de Ghaidarov, 2014

Dans son article Ghaidarov [2014], modifie quelque peu l'approche utilisée par Longstaff [1995] ou encore Finnerty [2012]. Reprenant le modèle d'assimilation de la liquidité à une

option de vente, il va par contre modifier la caractérisation de ladite option.

En effet, Ghaidarov va proposer un majorant à la prime d'illiquidité. Ce majorant est déterminé indépendamment de l'aptitude *market timing* de l'investisseur.

Comme proposé par Ghaidarov, nous illustrerons cette approche *forward* par le tableau 3.2.

La stratégie 1, présentée dans la première moitié du tableau 3.2, illustre un investisseur sans contrainte d'inessibilité, tandis que la stratégie 2, deuxième moitié du même tableau, décrit un investisseur contraint par un délai d'inessibilité. La quantité S désigne le prix de l'action librement cessible, alors que R correspond au prix de l'action si inessible. Par ailleurs, D désigne la fonction de payoff.

Description de la stratégie 1

Dans le cas 1, l'investisseur acquiert un actif au prix $S(0)$ en date 0 qu'il est libre de revendre à une date future t au prix de marché.

Description de la stratégie 2

Dans son approche, l'auteur suppose, en premier lieu, que la vente de l'action se fera à une date fixée, **connue d'avance** $0 \leq u \leq T$. Sous cette hypothèse, le flux en date T , relativement à la stratégie 2, correspond à $S(T) - S(u)e^{r(T-u)}$. Pour se couvrir contre un cash-flow négatif, le détenteur d'une action inessible à compter d'une date u , demanderait une prime de risque. Il vient que cette prime de risque correspondrait à la quantité $\max[S(u)e^{r(T-u)} - S(T), 0]$. L'investisseur pourrait acquérir un dérivé dont le payoff est alors $\max[S(u)e^{r(T-u)} - S(T), 0]$. L'exercice d'un tel dérivé, assure à l'investisseur, un flux net en date T , toujours positif ou nul. De manière analogue à Longstaff, l'on peut conclure que les flux de la stratégie 2 majorent ceux de la stratégie 1. Ainsi, la décote d'illiquidité peut s'apparenter à la valeur de l'option de vente *forward* de maturité T et de date de début u .

L'hypothèse selon laquelle, la date de vente de l'action à une date connue d'avance u , n'étant pas réaliste, la conclusion précédente demeure si l'on suppose que le détenteur du sous-jacent peut spécifier la date future du début de l'option de vente. Dès l'annonce à une date t , le détenteur de l'action inessible, recevra une option de vente de type européen, de maturité $T - t$ et de prix d'exercice $K(T) = S(t)e^{r(T-t)}$.

Considérant qu'un tel produit dérivé, puisse être évalué, l'investisseur contraint à un délai d'inessibilité, peut utiliser ce dernier afin de garantir que le flux déduit de l'exercice de produit et du prix de l'action inessible soit un majorant du prix de l'action librement échangeable (stratégie 1). Sous la stratégie 2, l'investisseur emprunte un montant équivalent à $S(t)$ au taux sans risque, annonce le début de la prise d'effet de l'option de vente à départ décalé et recevra dès lors l'option de vente de maturité $T - t$ et de prix d'exercice $K(T)$. Le prix de cette dernière constitue le majorant de la décote d'illiquidité dans un cadre général où la date de cession de l'action est arbitraire et non connue a priori.

3.2.2.1 Modélisation de l'option de vente

Ghaidarov, tout comme Longstaff, considère la dynamique brownienne géométrique suivante, sous la probabilité risque neutre pour le sous-jacent :

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dB_t \quad (3.7)$$

Scénario	Cash flow à $t = 0$	Cash flow à une date u	Cash flow à la date T
Stratégie 1			
Achat de l'action	$-S(0)$	$+S(u)$	
Vente de l'action			$+S(u)$
Total	$-S(0)$	$+S(u)$	0
Stratégie 2			
Achat de l'action	$-R$		$S(T)$
Vente de l'action		$+S(u)$	
Emprunt			$-S(u)e^{r(T-u)}$
Remboursement	$-D$		
Achat de l'option			$\max [S(u)e^{r(T-u)} - S(T), 0]$
Payoff de l'option			
Total	$-R - D$	$+S(u)$	≥ 0

TABLE 3.2 – Stratégies selon l'approche de Ghaidarov

Sous cette dynamique, la prime d'illiquidité traduite en option européenne, s'écrit, avec pour prix d'exercice $S(0)e^{rT}$:

$$P_0(K(T), S(T), T) = S(0) \left\{ 2\phi \left(\frac{\sigma\sqrt{T}}{2} \right) - 1 \right\} \quad (3.8)$$

avec ϕ la fonction de densité de la loi normale standard.

L'annexe B apporte la preuve de l'équation 3.8.

3.2.2.2 Application numérique

Le graphique 3.3 présente l'évolution des primes d'illiquidité en fonction de la volatilité du sous-jacent. A des fins de comparaison, nous considérons les mêmes valeurs de volatilité que dans le cas de l'approche de Longstaff. Le tableau 3.3 présente les primes d'incessibilité

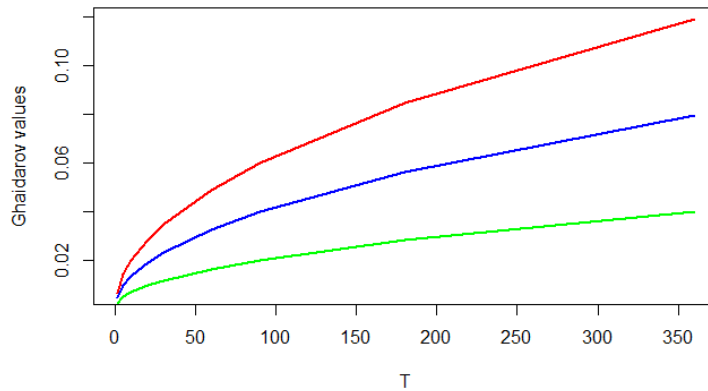


FIGURE 3.3 – Évolution des primes d'illiquidité en fonction de la volatilité et de la période d'incessibilité T exprimée en jours (En vert la courbe associée à $\sigma = 0.1$, en bleu $\sigma = 0.2$ et en rouge $\sigma = 0.3$.)

selon les approches de Longstaff et de Ghaidarov.

Comme attendu, les primes de l'approche 'Lookback' sont toujours supérieures à celles de l'approche 'Forward'. Pour une volatilité de 30% annuel et une période de restriction d'un an, la prime s'élève à 12% de la valeur du sous-jacent pour l'approche 'Forward', alors qu'elle est de 27% pour l'approche 'Lookback'. Cela confirme l'analyse suivant laquelle, la prime proposée pour recourir à un placement privé, peut être jugée excessive par les émetteurs.

Visualisons à présent, sur le graphique 3.4 un comparatif de ces primes selon qu'on soit sur le marché sud-africain ou nigérian. Nous rappelons dans le tableau 3.4, les valeurs de volatilités journalières déterminées sur ces deux indices.

On constate que les primes pour l'indice sud-africain sont plus importantes que celles de l'indice nigérian, car la volatilité observée sur l'indice JALSH est plus importante que celle de l'indice NGSE. En sus, les formules fermées des primes sont des fonctions croissantes de la volatilité. Vue comme un spread, une prime élevée fait donc ressortir une incertitude plus forte vis à vis du créancier.

Approche Ghaidarov			
Période de restriction	$\sigma = 10\%$	$\sigma = 20\%$	$\sigma = 30\%$
1 jr	0.00210261	0.00420520	0.00630777
5 jrs	0.00470155	0.00940294	0.01410400
10 jrs	0.00664896	0.01329746	0.01994504
20 jrs	0.00940294	0.01880458	0.02820360
30 jrs	0.01151607	0.02302974	0.03453862
60 jrs	0.01628562	0.03256445	0.04882973
90 jrs	0.01994504	0.03987761	0.05978529
180 jrs	0.02820360	0.05637198	0.08447003
1 an	0.03987761	0.07965567	0.11923538
Approche Longstaff			
Période de restriction	$\sigma = 10\%$	$\sigma = 20\%$	$\sigma = 30\%$
1 jr	0.00421217	0.00843826	0.01267829
5 jrs	0.00943794	0.01894564	0.02852345
10 jrs	0.01336767	0.02687516	0.04052338
20 jrs	0.01894564	0.03817168	0.05768071
30 jrs	0.02324208	0.04690562	0.07099542
60 jrs	0.03299243	0.06683176	0.10153157
90 jrs	0.04052338	0.08232170	0.12541986
180 jrs	0.05768071	0.11793192	0.18082405
1 an	0.0823217	0.1698427	0.2627620

TABLE 3.3 – Comparaison des primes d'illiquidité selon les approches de Longstaff et de Ghaidarov

Statistiques	Afrique du sud (indice JALSH)	Nigéria (indice NGSE)
Ecart-Type (σ)	0.01243	0.01055

TABLE 3.4 – Statistiques descriptives des indices africains

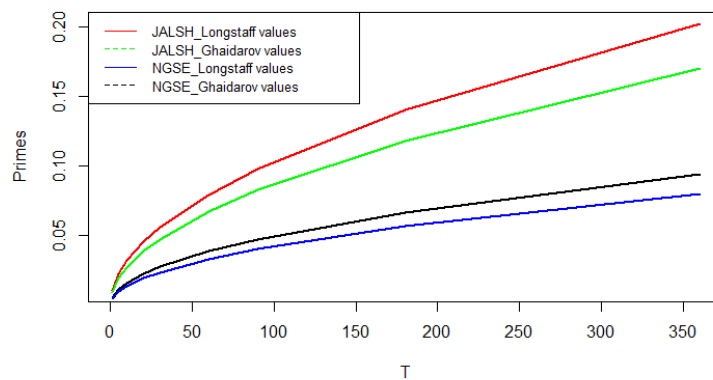


FIGURE 3.4 – Évolution des primes d'illiquidité en fonction de la volatilité des indices africains et de la période d'inessibilité T exprimée en jours

3.3 Une Extension de la modélisation de la prime d'illiquidité

Ghaidarov [2014] considère une modélisation gaussienne des rendements du sous-jacent, telle que décrite dans la section 3.2.2. En effet, Ghaidarov, en modifiant l'approche de F. Longstaff, assimile la décote d'inessibilité à une option de vente à départ différé ou à démarrage futur.

Nous proposons cependant, d'illustrer la décote d'illiquidité au moyen d'un modèle davantage réaliste, capable de rendre compte de périodes à forte volatilité des marchés, qu'est le modèle à changement d'états log-normal. Rappelons que, dans ce type de modélisation, le rendement du sous-jacent se définit comme suit :

$$y_t/\delta_t = \ln \left(\frac{S(t+1)}{S(t)} \right) \sim N(\mu_{\delta_t}, \sigma_{\delta_t}^2)$$

où δ_t désigne l'état actuel du processus. En réalité, la dynamique du sous-jacent s'écrirait donc, sous la probabilité historique, par :

$$dS(t) = \mu_{\delta_t} S(t)dt + \sigma_{\delta_t} S(t)dB_t \quad (3.9)$$

B_t étant un brownien standard sous la probabilité historique.

3.3.1 Choix d'une mesure d'évaluation

Considérant que le marché est incomplet, dans le cadre d'un modèle à changement de régimes [Hardy, 2003, Bollen, 1998], le choix d'une mesure équivalente risque ajustée s'impose. Empruntant la même argumentation que Bollen [1998], nous utiliserons la mesure Q conservant les probabilités de transition. Toutefois, le passage de la mesure historique à cette mesure Q affecte le drift du processus. Ainsi, relativement au régime t , μ_{δ_t} deviendra $r - \frac{1}{2}\sigma_{\delta_t}^2$, où r est le taux sans risque.

3.3.2 Modélisation et évaluation de l'option de vente

Avec les notations du chapitre 2, nous réécrivons la dynamique du sous-jacent, sous la mesure Q :

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma_{\delta_t} S(t)dW_t \quad (3.10)$$

W étant un brownien standard sous la mesure Q .

Bollen [1998] utilise une approche par simulation dans le cas de l'évaluation d'une option de vente, en présence d'un processus à changement de régimes. Hardy [2003] propose une formule fermée, pour cette option de vente européenne, conditionnée par le temps de présence du processus dans l'état 1.

Sous la mesure Q et de façon analogue à Hardy [2003], l'on est en mesure d'aboutir à une formule fermée de la prime d'illiquidité qui correspond à la prime d'une option de vente, telle que proposée par Ghaidarov [2014]. Rappelons que la fonction de distribution du temps de séjour dans l'état 1 est connue comme précisée au chapitre 2 à l'équation 2.32 et reprise ci-dessous :

$$S(n)|K_n \sim LN(\mu^*(K_n), \sigma^*(K_n)) \text{ avec}$$

$$\mu^*(K_n) = K_n\mu_1 + (n - K_n)\mu_2 \text{ et } \sigma^* = \sigma^*(K_n) = \sqrt{K_n\sigma_1^2 + (n - K_n)\sigma_2^2}$$

n étant la durée totale en jours, K_n , la durée totale en jours passés dans le régime 1, sur l'horizon T . Nous montrons, à l'annexe C, que la prime d'illiquidité, en présence d'un processus à changement de régimes s'écrit :

$$P_0(K(T), S(T), T) = S(0)E_{K_n} \left[2\phi \left(\frac{\sigma^*}{2} \right) - 1 \right] \quad (3.11)$$

où ϕ est la fonction de densité de la loi normale standard.

3.3.3 Application numérique

Nous aurons besoin, pour l'application numérique, de déterminer la distribution de probabilités dans le régime 1, K_n , du processus à changement de régimes. Selon les indices africains JALSH et NGSE, nous obtenons, pour un horizon de 360 jours, les distributions affichées sur le graphique 3.5.

Sur la base des distributions de probabilité de séjour produites, nous obtenons les résultats de primes d'illiquidité présentés dans le tableau 3.5.

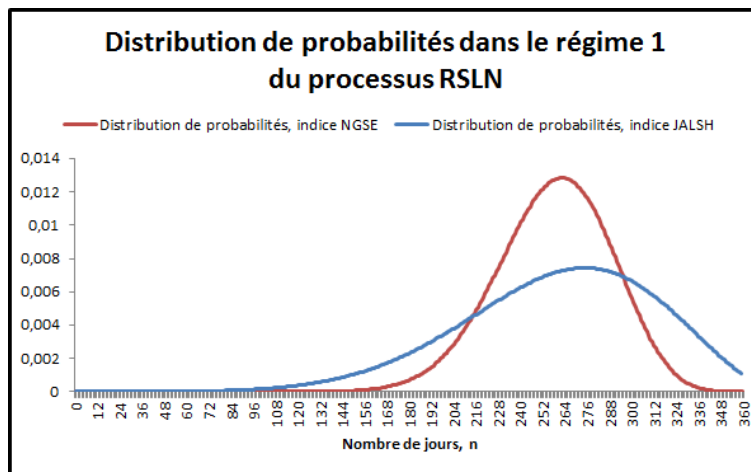


FIGURE 3.5 – Distribution de probabilités dans le régime 1 du processus RSLN

Cadre markovien		
Période de restriction	Indice NGSE	Indice JALSH
6 mois	0.0556934	0.0651526
1 an	0.0792191	0.0929407

TABLE 3.5 – Primes d'illiquidité selon l'approche de Ghaidarov, dans un cadre de processus à changement de régime

Ces résultats sont obtenus sur la base des paramètres calibrés des différents indices (Cf. 2.8).

L'on constate que les primes obtenues sont toutes inférieures, pour une même période de restriction, à celles obtenues par l'approche Longstaff, cela s'entendant dans l'intervalle d'écart-type compris entre 20 et 30%. En effet, les volatilités historiques des indices NGSE et JALSH, se situent dans cet intervalle.

De façon générale, on note que les valeurs des primes à 1 an sont légèrement plus importantes que les primes à 6 mois, reflétant ainsi naturellement l'effet de la période de

restriction.

Par ailleurs, une comparaison entre les indices eux-mêmes, permet de noter que les primes pour l'indice sud-africain représentent en moyenne 142% des primes obtenues pour l'indice nigérian dans le cadre markovien. Notant que la volatilité historique globale de l'indice sud-africain est plus importante que celle de l'indice nigérian, cette dernière constatation était à anticiper. Il vient donc que pour un investisseur présent à la fois sur les marchés sud-africain et nigérian, il pourrait prétendre à une décote de 7% sur le marché nigérian et à 9% sur le marché sud-africain, s'il était contraint à une période de rétention des titres d'1 an.

3.4 Conclusion

La question d'illiquidité se pose particulièrement dans le contexte des marchés africains subsahariens. Nous apportons des outils permettant d'évaluer la prime associée à ce risque d'inessibilité. Nous appuyant sur les articles de Longstaff [1995] et Ghaidarov [2014], nous apportons une quantification de la prime de décote d'illiquidité sur la base du modèle à changements de régime présenté par le précédent chapitre et qui selon nos analyses laissent penser qu'elle était davantage réaliste et permet de mieux intégrer des risques extrêmes. Les deux approches évoquées sont basées sur l'assimilation de la prime d'inessibilité à la prime d'une option de vente. Ceci étant, le modèle à chaînes de markov cachées induisant une incomplétude du marché, nous avons eu recours à l'argumentaire de Bollen [1998] dans le choix d'une mesure d'évaluation, conduisant à l'obtention d'une formule fermée de la prime d'illiquidité. Une application numérique permet de confirmer le caractère croissant de la prime en fonction de la période d'inessibilité et de la volatilité. Naturellement donc, plus la période de restriction sera importante, plus l'investisseur pourrait bénéficier d'une décote conséquente qui le compenserait de cette illiquidité contractuelle.

Chapitre 4

Mesures de risque et exigence en capital dans le contexte africain subsaharien

Contents

4.1	Introduction	71
4.2	Définition et formalisation d'une mesure de risque	71
4.2.1	Définition d'une mesure de risque	71
4.2.2	Formalisation d'une mesure de risque	71
4.2.2.1	La Value at Risk (VaR)	72
4.2.2.2	La Conditional Tail Expectation (CTE)	72
4.3	Approche simulateur	73
4.3.1	Détermination de la VaR	73
4.3.2	Détermination de la CTE	73
4.4	Calculs exacts : exemple d'un contrat de type GMMB	73
4.4.1	Définition d'un contrat d'assurance	74
4.4.2	Définition d'un contrat d'assurance de type GMMB	74
4.4.3	Détermination de la VaR	74
4.4.4	Détermination de la CTE	75
4.4.5	Illustration et résultats	76
4.5	Conclusion	77

4.1 Introduction

Nous abordons dans ce chapitre, la notion de mesures de risques, dans le cadre des marchés boursiers africains subsahariens. Il sera question de traiter de cette problématique et de l'illustrer, sur la base d'un contrat d'assurance à garantie plancher.

En effet, il paraît aisé de relever que la présence de risque est implicite à toute activité de marché, mais également pour les assureurs quels qu'ils soient. Nous associons dans le présent chapitre ces deux sphères pour illustrer l'absolue nécessité que revêt la maîtrise des risques liés à une activité.

4.2 Définition et formalisation d'une mesure de risque

4.2.1 Définition d'une mesure de risque

Une mesure de risque est une méthode par laquelle, le risque porté par un titre est représenté par une quantité ou une fonction réelle. Les actuaires sont particulièrement familiers des mesures de type *premium principle*, qui consiste à la détermination du tarif d'un contrat sur la base de la distribution du risque assuré. Dans le monde financier, la notion de valeur à risque (VaR) est beaucoup plus prépondérante, et se détermine sur la base de la distribution de pertes d'un portefeuille ou d'un titre financier. Cette notion de VaR se retrouve au centre de la notion de solvabilité, pour le calcul de capitaux requis ou de fonds propres réglementaires. En somme, les mesures de risque constituent, pour ainsi dire, un outil de contrôle des organes de réglementation dans la quantification du risque des assujettis. Nous proposons à présent, une formalisation mathématique de la mesure de risque.

4.2.2 Formalisation d'une mesure de risque

Comme vu dans la définition, une mesure de risque U est une fonction définie sur l'espace des variables aléatoires et prenant ses valeurs dans l'ensemble réel. Mathématiquement, une mesure de risque doit respecter les axiomes suivants : supposons X et Y , deux variables aléatoires

- invariance en loi : $X \stackrel{L}{=} Y \Rightarrow U(X) = U(Y)$
- croissance : $X \geq Y \Rightarrow U(X) \geq U(Y)$
- invariance par translation : $\forall u \in \mathbb{R}, U(X + u) = U(X) + u$
- homogénéité : $\forall \mu \in \mathbb{R}_+, U(\mu X) = \mu U(X)$
- sous-additivité : $U(X + Y) \leq U(X) + U(Y)$ (bénéfice de la diversification d'un portefeuille par exemple.)
- convexité : $\forall \alpha \in [0, 1], U(\alpha X + (1 - \alpha)Y) \leq \alpha U(X) + (1 - \alpha)U(Y)$

Il est important de noter qu'une mesure de risque **cohérente** doit vérifier les principes suivants :

- monotonie et invariance par translation
- homogénéité et
- sous-additivité

Il faut cependant préciser que contrairement à la CTE (Conditional Tail Expectation), la VaR n'est pas une mesure de risque cohérente car le critère de sous-additivité n'est pas toujours rempli. Ce défaut est la principale critique qui limite son utilisation.

4.2.2.1 La Value at Risk (VaR)

A la fin des années 90, et en réponse à de nombreuses crises financières [Jorion, 2007], la notion de VaR fit son apparition¹.

Définition

La valeur à risque, notée VaR , au niveau de risque $\alpha \in [0, 1]$, et à horizon $t \in \mathbb{N}^*$ est le quantile de niveau $1 - \alpha$ de la distribution des pertes.

$$U_\alpha(L) = VaR(L, \alpha) = \inf \{x, \mathbb{P}(L \leq x) \geq \alpha\} = F_L^{-1}(\alpha) \quad (4.1)$$

F étant la fonction de répartition de la distribution de pertes actualisée L .

La VaR est alors le 100^{ème} percentile de la distribution de pertes actualisées et constitue le montant minimal à détenir à horizon t . Dans le cadre assurantiel, la VaR constitue donc le montant minimal à détenir, par un assureur à un horizon t , pour un risque α pour répondre à ses engagements vis-à-vis des assurés et de leurs bénéficiaires. Généralement, les réglementations imposent un niveau de 99%.

Lemme 4.2.1 *Les axiomes suivants sont facilement justifiables :*

- $\forall \alpha \in [0, 1]$, si h est une fonction croissante et continue à gauche, alors

$$VaR(h(L); \alpha) = h(F_L^{-1}(\alpha)) = h(VaR(L, \alpha))$$

- $\forall \alpha \in [0, 1]$, si h est une fonction décroissante, continue à droite et si F_L est bijective, alors

$$VaR(h(L), \alpha) = h(F_L^{-1}(1 - \alpha)) = h(VaR(L, 1 - \alpha)) \quad \square$$

4.2.2.2 La Conditional Tail Expectation (CTE)

La CTE, se définit comme la perte attendue, sous l'hypothèse que la VaR au niveau α soit dépassée. Cela se traduit également comme étant la perte moyenne dans les $1 - \alpha\%$ des cas.

Définition

Formellement la CTE s'obtient par la relation suivante :

$$CTE(L, \alpha) = E[L | L > VaR(L, \alpha)] \quad (4.2)$$

sous l'hypothèse que L est une distribution de pertes continue.

Nous retenons cependant, que dans la pratique, on procède en deux étapes pour le calcul de la CTE :

1. "The origins of VaR", (tiré des notes de cours de Charpentier [2010] : Till Guldemann can be viewed as the creator of the term /textitvalue at risk while head of global research at J.P. Morgan in the late 1980s. The risk-management group had to decide whether *fully hedged* means investing in long bonds, thus generating stable *earnings* or investing in cash, thus keeping the market *value* constant. The bank decided that "value risks" were more important than "earning risks", initiating the way of VAR.

At that time, there was much concern, about managing the risks of derivatives properly. The Group of Thirty, which had a representative from J.P. Morgan, provided a venue for discussing best risk-management practices. The term found its way through the G-30 report published in July 1993. Apparently, this was the first widely publicized appearance of the term *value at risk*

☞ trouver β' tel que

$$\beta' = \max\{\beta; V_\alpha = V_{\beta'}\}$$

puis

☞ on calcule la CTE telle que

$$CTE(L, \alpha) = \frac{(1 - \beta')E[L|L > V_\alpha] + (\beta' - \alpha)V_\alpha}{1 - \alpha}$$

4.3 Approche simulateur

4.3.1 Détermination de la VaR

Connaissant, la distribution de pertes actualisées, il suffit d'ordonner ses différentes valeurs et la VaR correspond au quantile $N\alpha$ qu'on peut noter $L_{N\alpha}$, N étant le nombre de simulations.

La VaR étant une quantité tributaire de la distribution obtenue, il peut être intéressant de mesurer l'intervalle de confiance de son estimation. Ainsi, pour un niveau β , l'intervalle de confiance, non paramétrique, s'obtient par :

$$[L_{N\alpha-I}, L_{N\alpha+I}] \tag{4.3}$$

avec $I = \phi^{-1}\left(\frac{1+\beta}{2}\right)\sqrt{N\alpha(1-\alpha)}$. Usuellement on utilise la valeur entière la plus proche de I , sinon une interpolation à l'aide des points entiers encadrant I est possible.

Nous pouvons justifier cette dernière écriture en s'inspirant de [Hardy \[2003\]](#) ou encore [David and Nagaraja \[2003\]](#).

En effet, soit C , le nombre de valeurs simulées inférieures à la VaR. C suit une distribution binomiale de paramètres N et α . Un estimateur connu, sans biais de la variable C est $N\alpha$. Par suite, une approximation de la loi binomiale pour $N\alpha > 30$, conduit à une loi normale et permet d'aboutir à la relation 4.3.

4.3.2 Détermination de la CTE

L'approche simulateur de la *Conditional Tail Expectation* CTE est assez simple. Il s'agit de calculer la moyenne des pertes des $N(1 - \alpha)$ simulations, N étant le nombre de simulations. Supposant que $N\alpha$ est un nombre entier, on obtient :

$$CTE(L, \alpha) = \sum_{k=N\alpha+1}^N \frac{L_k}{N(1-\alpha)} \tag{4.4}$$

L_k correspond à la perte au rang k , de la distribution de perte ordonnée. Ainsi, lorsque le quantile d'ordre α est $L_{(N\alpha)}$, l'estimation de la CTE est la moyenne des pertes plus grandes que $L_{(N\alpha)}$.

4.4 Calculs exacts : exemple d'un contrat de type GMMB

Nous illustrons cette partie sur la base de contrats de type GMMB. Tout d'abord, retour sur la définition d'un contrat d'assurance puis nous définirons ce qu'est un contrat à garantie plancher dont la dénomination anglaise correspond à *Guaranteed Minimum Maturity Benefit*.

4.4.1 Définition d'un contrat d'assurance

Définition d'un contrat aléatoire

Bien qu'il n'existe pas de définition légale du contrat d'assurance, l'article 1964 du Code Civil indique que : Le contrat aléatoire est une convention réciproque dont les effets, quant aux avantages et aux pertes, soit pour toutes les parties, soit pour l'une ou plusieurs d'entre elles, dépendent d'un événement incertain.

Tels sont :

- le contrat d'assurance,
- le jeu et le pari,
- le contrat de rente viagère

Définition d'un contrat d'assurance

Nous proposons ici la définition jurisprudentielle de la Cour de Justice de l'union Européenne : *contrat en vertu duquel, moyennant le paiement d'une prime, fixe ou variable, une partie, l'assureur, s'engage envers une autre partie, le preneur d'assurance, à fournir une prestation stipulée dans le contrat au cas où surviendrait un événement incertain que, selon le cas, l'assuré ou le bénéficiaire a intérêt à ne pas voir réalisé.*

4.4.2 Définition d'un contrat d'assurance de type GMMB

Un contrat de type GMMB est un contrat d'assurance à garantie plancher, par lequel, l'assureur s'engage à verser un capital minimum au bénéficiaire, au terme contractuel du contrat, en cas de survie de ce dernier. Ce capital minimum est insensible à la valeur des unités de compte détenues à la date de maturité du contrat.

4.4.3 Détermination de la VaR

On pourrait visualiser le support d'un contrat de type GMMB, comme un fonds dont la valeur évolue suivant une dynamique choisie. Notons par G la garantie proposée par le contrat et F la valeur du fonds. Par ailleurs, nous faisons l'hypothèse que l'assuré vive au-delà de la maturité contractuelle et que la marge de compensation (incluant les frais de gestion du contrat) est nulle.

Dans l'optique du calcul de la VaR, nous définissons par :

$$L = \begin{cases} (G - F_n)e^{-rn} & G \geq F_n \\ 0 & G < F_n \end{cases} \quad (4.5)$$

la valeur actualisée, en date 0, de la perte mesurée par l'écart entre la valeur du fonds et celle de la garantie contractuelle. Sachant n , le terme du contrat, la valeur F_n du fonds est fonction de la valeur d'un indice S_n de référence. En effet, nous appliquons un taux journalier m qui correspond à la charge liée au financement de la garantie du contrat d'assurance.

Il apparaît sensé, d'étudier le niveau en dessous duquel, il n'y aurait pas de paiement en dessous du niveau de garantie. Autrement dit, on doit évaluer la probabilité suivant laquelle, la perte espérée est nulle. Formellement, cela revient à écrire :

$$\zeta = P[L = 0] = P[G < F_n] = P[G < S_n(1 - m)^n] = P\left[\frac{G}{S_0} < \frac{S_n(1 - m)^n}{S_0}\right] \quad (4.6)$$

Cette probabilité est donc intrinsèquement fonction de la distribution de $S(n)$.

Cas 1 : distribution log-normale

Ainsi, lorsque :

$$\frac{S_n(1-m)^n}{S_0} \sim LN(n(\mu + \ln(1-m)), \sqrt{n})\sigma$$

il est facile de prouver que

$$\zeta = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(G/S_0) - n(\mu + \ln(1-m))}{\sqrt{n}\sigma}\right) \quad (4.7)$$

Cas 2 : processus à changement de régime log-normal

En cas de processus à changement de régime log-normal, l'on aboutirait au résultat suivant :

$$\zeta = 1 - \sum_{K_n=0}^n \Phi\left(\frac{\ln(G/S_0) - \mu^*(K_n) - n \ln(1-m)}{\sigma(K_n)}\right) p_n(K_n) \quad (4.8)$$

avec $\mu^*(K_n) = \mu^* = K_n\mu_1 + (n - K_n)\mu_2$ et $\sigma^*(K_n) = \sigma^* = \sqrt{K_n\sigma_1^2 + (n - K_n)\sigma_2^2}$.

De fait, lorsque le niveau α est tel que $\alpha > \zeta$, $L > 0$. Dans ce cas alors, la VaR, au niveau α , $U_\alpha(L)$ est telle que :

$$P[F_n + U_\alpha(L)e^{rn} > G] \geq \alpha$$

Sous l'hypothèse que F_n est une variable aléatoire continue, on obtient :

$$U_\alpha(L) = (G - F_{F_n^{-1}(1-\alpha)})e^{-rn} \quad (4.9)$$

F_{F_n} étant la fonction de répartition de la valeur du fonds F_n à la maturité.

Sous le **cas 1**, on obtient une formule explicite fermée :

$$U_\alpha(L) = (G - F_0 \exp(-z_\alpha \sqrt{n}\sigma + n(\mu + \ln(1-m)))) e^{-rn} \quad (4.10)$$

Sous le **cas 2**, connaissant la fonction de répartition explicite de la valeur du fonds F_n à partir de 2.33, il suffit de déterminer analytiquement $U_\alpha(L)$ tel que :

$$P[F_n + U_\alpha(L)e^{rn} > G] = \alpha$$

4.4.4 Détermination de la CTE

Nous allons à présent voir les différents résultats relatifs à la *Conditional Tail Expectation*.

De manière analogue au calcul de VaR, une formule explicite peut être exhibée pour le calcul de la CTE, selon les distributions du facteur de risque.

Nous désignons toujours par ζ , la probabilité que la garantie soit inférieure à la valeur du fonds à la maturité F_n . Deux cas sont à distinguer :

Cas 1 : $\alpha \geq \zeta$

Rappelons que S_n a une fonction de répartition et de densité telles que définies aux 2.33 et 2.34 respectivement. Sur la base des caractéristiques de la variable S_n , on aboutit à la relation suivante :

$$\begin{aligned} CTE(\alpha, L) &= E[L|L > U_\alpha(L)] \\ &= e^{-rn} \left[G - \frac{1}{1-\alpha} \int_0^{G-U_\alpha(L)e^{rn}} s f_{F_n}(s) ds \right] \end{aligned} \quad (4.11)$$

Si S_n est un processus log-normal

$$CTE(\alpha, L) = e^{-rn} \left[G - \frac{e^{n(\mu + \ln(1-m) + \sigma^2/2)}}{1 - \alpha} \Phi(-z_\alpha - \sqrt{n}\sigma) \right] \quad (4.12)$$

Si S_n est régi par un processus à changement de régime log-normal

$$CTE(\alpha, L) = e^{-rn} \left[G - \frac{(1-m)^n}{1-\alpha} \sum_{K_n=0}^n p_n(K_n) (e^{\mu^*(K_n) + \sigma^*(K_n)^2}) \Phi(D_{K_n}) \right] \quad (4.13)$$

avec

$$D_{K_n} = \frac{\ln(G - U_\alpha(L)e^{rn}) - \mu^*(K_n) - n \ln(1-m) - \sigma^*(K_n)^2}{\sigma^*(K_n)}$$

Les relations 4.12 et 4.13 sont justifiées à l'annexe D.

Cas 2 : $\alpha < \zeta$

Dans ce cas précis, le quantile V_α tombe dans la masse de probabilité à 0 de la distribution de perte. De manière générale, l'on pourrait procéder de la façon suivante pour le calcul de la CTE :

- trouver τ tel que : $\tau = \max\{\beta; V_\alpha = V_\beta\}$
- puis :

$$CTE(\alpha, L) = \frac{(1-\tau)E[L|L > V_\tau] + (\tau - \alpha)V_\alpha}{1 - \alpha} \quad (4.14)$$

Il vient immédiatement que lorsque $\alpha < \zeta$, alors

$$CTE(\alpha, L) = \frac{(1-\zeta)}{(1-\alpha)} CTE(\zeta, L) \quad (4.15)$$

4.4.5 Illustration et résultats

Pour cette illustration, nous considérons l'ensemble des caractéristiques du contrat telles que présentées dans la table 4.1.

Valeur du fonds à l'origine F_0	1
Niveau de garantie contractuelle G	1
Taux de prélèvement mensuel m	0.25%
Maturité du contrat n	360 jours

TABLE 4.1 – Caractéristiques du contrat GMMB

Les résultats de VaR et de CTE, pour différents niveaux de risque sont disponibles dans la table 4.2. Nous utilisons pour ces différents résultats, les paramètres des lois estimées au chapitre 2. Le taux sans risque, r , est de 0.5% mensuel.

Comme attendu, les différentes mesures de risques du modèle RSLN sont supérieures à celles du modèle LN, en raison de la queue de distribution plus épaisse du premier modèle cité.

D'une part, de manière évidente, la CTE est toujours supérieure à la VaR pour un même niveau de risque. D'autre part, pour chacune des mesures de risque, l'amplitude des écarts de valeurs suivant les deux modèles augmente avec le niveau de risque.

VaR				
Modèles	ζ	$V_{90\%}$	$V_{95\%}$	$V_{99\%}$
LN	50.0033%	14.8052%	21.1264%	31.6174%
RSLN	70.6248%	16.8301%	24.4291%	37.3755%
CTE				
Modèles	ζ	CTE(90%)	CTE(95%)	CTE(99%)
LN	50.0033%	24.5191%	29.2793%	37.6180%
RSLN	70.6248%	26.3228%	32.3108%	42.9591%

TABLE 4.2 – Calculs de VaR et de CTE pour l'indice sud-africain JALSH

4.5 Conclusion

Ce chapitre a permis d'étudier deux mesures de risques que sont la valeur à risques et la *Conditional Tail Expectation*. Ces deux mesures ont été étudiées dans le contexte d'un contrat assurantiel de type *Guaranteed Minimum Maturity Benefit* (GMMB), avec une dynamique du sous-jacent gouvernée par un processus à changement de régimes. La spécificité ici est que le sous-jacent est représenté par un indice financier sud-africain.

Bien que les résultats de ces deux indicateurs puissent être obtenus suivant une approche simulateur, nous parvenons à proposer des formules exactes sous l'hypothèse que l'indice sous-jacent évolue suivant un processus à variation d'états. Une application numérique permet de confirmer que les valeurs obtenues via une approche à changement de régimes sont plus élevées que celles obtenues dans un cadre de rendements gaussiens. Cela correspond aux attentes dans la mesure où le processus à changement de régimes a pour but de proposer une queue de distribution plus épaisse qu'un processus gaussien. Il est à propos nécessaire de rappeler que l'hypothèse d'une meilleure adéquation du modèle RSLN a été étudiée dans le chapitre 2 et que les résultats de ce chapitre sont cohérents.

Conclusion générale

Nous avons tout au long de ce mémoire, porté notre attention sur les marchés de capitaux subsahariens. La présente thèse a donc été le lieu de présenter quelques éléments d'appréciation et de compréhension aux investisseurs potentiels. Il apparaît donc nécessaire de proposer une présentation des deux principales places financières boursières en précisant la réglementation en vigueur de même que les acteurs essentiels. Le premier marché, la place sud africaine a vu le jour dans les années 1960 et existe sous sa forme actuelle depuis 2002 grâce à sa modernisation insufflée par la firme FTSE/Russell, leader mondial dans la mise en place de plateformes boursières. Elle est régulée par La *Financial Services Board*. La deuxième place boursière en termes de capitalisation est la bourse nigérienne fondée en 1960 et régulée quant à elle par la *Securities Exchange Commission*. Ces deux principales places financières sont regroupées au sein de *African Securities Exchange Association* avec les autres places financières africaines importantes.

Nous avons également étudié l'aspect réglementaire et remarqué l'importance d'un contexte juridique et judiciaire adéquat. Ces deux éléments indispensables pour garantir la sécurité des investisseurs doivent être mis en place et adaptés convenablement. Toujours d'un point de vue réglementaire, mais cette fois-ci dans le domaine des assurances, nous avons pu remarquer que des projets similaires à Solvabilité II, qui en entré en vigueur au 1er janvier 2016 dans l'Union Européenne, sont en cours de finalisation à diverses étapes en Afrique du Sud et au Nigéria. Tout comme Solvabilité II, ces deux réglementations ont pour objectifs principaux, la protection des assurés et des bénéficiaires des contrats d'assurance et le maintien de la stabilité financière. Le premier pays cité a fait le choix de mettre en place une réglementation tenant compte des spécificités locales. Ainsi est né le *Solvency Assessment and Management* avec par exemple un choc action à 43% pour des actions de type *RSA equities*, sous-module propre au marché sud-africain. Le Nigéria, pour sa part compte reprendre intégralement la directive Solvabilité II telle qu'appliquée dans l'Union Européenne. Très clairement le but visé par la Commission Nationale d'Assurance du Nigéria est de permettre aux assureurs de s'exporter aussi bien que leurs homologues brésiliens qui avaient eux aussi fait le choix de se conformer intégralement aux standards internationaux. Nous avons observé les différents marchés existants avec une vision de leur évolution historique. Des marchés encore en phase de développement tels que ceux des obligations vertes ou des Eurobonds constituent des leviers importants du développement de la région subsaharienne bien que cela s'accompagne encore une fois d'une rigueur absolue tant sur le plan juridique que d'un point de vue opérationnel. D'autant plus que, en ce qui concerne les obligations vertes par exemple, les contrôles des avantages environnementaux sous-tendant ne sont pas toujours effectués en toute indépendance par les organismes. C'est la réserve émise relativement aux obligations vertes de l'état Français ou d'entreprises françaises par exemple, pour lesquelles le caractère *vert* n'est pas démontrable sans ambiguïté. Dans le cas des Eurobonds, le risque de surendettement doit être considéré tel que l'a rappelé le Fonds Monétaire International en 2015. Les investissements de type capital investissement restent faibles en Afrique en comparaison aux montants consentis dans d'autres pays émergents.

Cette faiblesse est justifiée notamment par un contexte politique délicat et un climat de transparence non partout incitatif.

Le marché des actions est pour sa part essentiellement concentré en Afrique du Sud et au Nigéria. Notre choix d'étude s'est donc naturellement porté sur les indices boursiers principaux de ces deux pays, le FTSE/JSE All-Share (JALSH) pour le premier et le NGSE All-Share (NGSE) pour le second. Nous avons confirmé, au travers des ces deux indices que les marchés financiers correspondants ne sont pas efficaces. Cette première constatation ayant permis de rejeter le modèle gaussien pour calibrer les données sur les deux indices considérés, nous avons testé les modèles de type auto régressif et un processus à changement de régime. Dans le chapitre 2, nous avons expliqué les procédures d'estimation, notamment du dernier type de processus cité car il nous semble être le mieux à même de modéliser l'évolution du cours des actions représentées par les indices JALSH et NGSE. Plus particulièrement, les critères statistiques de type Akaike ou Bayes, ont permis de sélectionner le modèle à changement de régimes log-normal que nous avons proposé dans ce mémoire. Toutefois, l'erreur de modèle semble limitée lorsqu'on considère le trio de modèles GARCH, E-GARCH et regime-switching. De fait, nous préconisons au lecteur d'effectuer un choix au regard des contraintes opérationnelles qui peuvent être liées au nombre de facteurs étudiés, à la taille des observations ou encore des éléments techniques matériels.

Notre attention s'est portée, dans le troisième chapitre, à la notion d'illiquidité sur les marchés africains subsahariens. Cet aspect d'illiquidité a été traité sur la base des contrats de type placements privés (les Euro PP en France). En effet, il s'agit de supports d'investissement bilatéraux qui s'opèrent en dehors des marchés établis. Ce sont donc des investissements directs pour lesquels le prix n'est pas fixé par les marchés. Il s'est agi d'une étude qui s'est placée dans un contexte hypothétique où ce type de placements fait son apparition sur le marché africain, car pouvant permettre de lever des capitaux importants pour les entreprises dont le recours au marché est limité. Pour les investisseurs, ce type de placement constituerait également une source de diversification. Sous cette hypothèse, le but a donc été d'identifier une méthodologie d'évaluation de ces supports et d'illustrer cette dernière sur la base des indices sud-africain et nigérian. Nous avons retenu deux approches visant à traiter la prime d'illiquidité comme une option de vente européenne. La première approche modélise cette option comme un put sur maximum du sous-jacent, quand la deuxième postule pour une option à départ décalé. Dans la littérature sur le sujet, le rendement du sous-jacent suit une dynamique gaussienne. Notre apport dans ce mémoire a été d'introduire la possibilité que la dynamique du sous-jacent soit gouvernée par un processus à changement de régime log-normal et de proposer une formule fermée d'évaluation. Les résultats restent conformes à nos attentes dans la mesure où les primes évoluent avec la volatilité et l'horizon. Il serait donc pertinent, étant donné que les placements privés sont des véhicules d'investissement à moyen ou long terme, d'observer l'évolution de ces primes sur un horizon supérieur à 1 an. L'une des voies d'amélioration de cette étude serait de également de considérer le cours de bourse d'entreprises réelles cotées sur le marché sud-africain pour déterminer de manière plus réaliste la prime de décote d'illiquidité. L'idée centrale étant d'identifier le spread entre l'action cotée de cette entreprise et le prix d'un placement privé à l'endroit de la même société. De façon immédiate, la différence entre les choix de modélisation du rendement de l'action sera plus probante.

Pour rappel, le présent mémoire s'est proposé d'étudier la gestion des risques financiers. Pour cette raison, nous nous devrions d'étudier quelques mesures de risque avec une application en assurance vie. La particularité, ici sera encore une fois de présenter l'ensemble de ces notions dans le contexte africain. En se référant aux indices sud-africain et nigérian,

nous étudions deux mesures de risques très présentes aussi bien en finance qu'en assurance et qui ont été reprises dans les différentes réglementations bancaire et assurantielle.

Nous nous sommes attachés tout au long de ce travail à présenter de façon claire les marchés financiers subsahariens principaux, les réglementations en vigueur et des éléments quantitatifs permettant d'appréhender la notion de risque inhérente. La question du risque de taux n'a pas été traitée mais constitue un élément de réflexion futur pertinent notamment aux vues des récentes période de taux bas voire négatifs qui ont prévalu en Europe et aux États-Unis notamment. L'idée sera d'identifier les impacts ressentis en Afrique subsaharienne notamment, consécutivement à cette baisse historique des taux. Ces impacts devront être appréhendés à la fois d'un point de vue réglementaire mais également quantitatif. La prise en compte conjointe des risques de taux et action pourra être alors judicieusement interrogée dans le contexte africain.

Appendices

Annexe A

Preuve de la formule fermée de Longstaff, 1995,

Preuve

Nous apportons ici une preuve complète à la formule fermée 3.6

$$\begin{aligned} P_0(K(T), S(T), T) &= e^{-rT} E_Q \left[\max_{0 \leq \tau \leq T} e^{r(T-\tau)} S(\tau) - S(T) \right] \\ &= e^{-rT} E_Q \left[\underbrace{\max_{0 \leq \tau \leq T} e^{r(T-\tau)} S(\tau)}_I - \underbrace{e^{-rT} E_Q[S(T)]}_{J=S(0)} \right] \end{aligned}$$

Calcul de I

De manière analogue à Longstaff [1994], posons : $X(t) = \ln[e^{-rt}S(t)/S(0)]$, $X = 0$

Le processus $X(t)$ défini suit la dynamique suivante :

$$dX(t) = \frac{-\sigma^2}{2} dt + \sigma dB_t$$

Posons à présent : $Y(T) = \max_{\tau} X(\tau)$ On obtient :

$$I = S(0)E_Q[\exp(Y(T))]$$

La fonction de densité de $Y(T)$ est donnée par Harrison [1985] démontre que la densité de $Y(T)$ s'écrit, pour $x \in [0, +\infty[$:

$$f_Y(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2T}} \exp\left[-\frac{(x + \sigma^2T/2)^2}{2\sigma^2T}\right] + e^{-x} \phi\left[\frac{-x + \sigma^2T/2}{\sigma^2T}\right]$$

On calcule ensuite :

$$E_Q[\exp(Y(T))] = \underbrace{\frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2T}} \int_0^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x + \sigma^2T/2)^2 + 2\sigma^2Tx}{2\sigma^2T}\right] dx}_K + \underbrace{\int_0^{+\infty} \phi\left[\frac{-x + \sigma^2T/2}{\sqrt{\sigma^2T}}\right] dx}_L$$

On récrit :

$$K = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2T}} \exp\left[-\frac{(x - \sigma^2T/2)^2}{2\sigma^2T}\right]$$

$$\text{Posons : } y = \frac{(x - \sigma^2T/2)}{\sqrt{\sigma^2T}} \Rightarrow dy = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2T}} dx$$

On obtient :

$$K = 2 \int_{\sqrt{\sigma^2T/2}}^{+\infty} \exp\left[\frac{-y^2}{2}\right] dy = 2\phi\left(\frac{\sqrt{\sigma^2T}}{2}\right)$$

Le calcul de la quantité L donne :

$$L = \int_0^{+\infty} \phi \left[\frac{-x + \sigma^2 T/2}{\sqrt{\sigma^2 T}} \right] dx$$

Par une simple intégration par parties, on a :

$$L = \left[x \phi \left(\frac{-x + \sigma^2 T/2}{\sqrt{\sigma^2 T/2}} \right) \right]_0^{+\infty} + \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \exp \left[-\frac{(x - \sigma^2 T/2)^2}{2\sigma^2 T} \right] dx}_M$$

On justifie assez facilement que la $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \phi \left(\frac{-x + \sigma^2 T/2}{\sqrt{\sigma^2 T/2}} \right) \right] = 0$, en se servant de l'approximation au voisinage de $+\infty$ de la fonction de répartition de la loi normale standard $\phi(x)$ telle que proposée par [Choudhury \[2014\]](#).

Par ailleurs, la dérivée de la partie exponentielle par rapport à la variable x donne :

Posons :

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 T}} \times \frac{1}{\sigma^2 T} (x - \sigma^2 T/2) \exp \left[-\frac{(x - \sigma^2 T/2)^2}{2\sigma^2 T} \right] dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 T}} \left\{ \frac{x}{\sigma^2 T} \exp \left[-\frac{(x - \sigma^2 T/2)^2}{2\sigma^2 T} \right] - \exp \left[-\frac{(x - \sigma^2 T/2)^2}{2\sigma^2 T} \right] \right\} dx \end{aligned}$$

Il vient ensuite que :

$$\begin{aligned} N - \frac{1}{\sigma^2 T} \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sigma^2 T} \exp \left[-\frac{(x - \sigma^2 T/2)^2}{2\sigma^2 T} \right] dx &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \int_0^{+\infty} \exp \left[-\frac{(x - \sigma^2 T/2)^2}{2\sigma^2 T} \right] dx \\ \Rightarrow M &= \sigma^2 T \left\{ N + \underbrace{\frac{1}{2\pi\sigma^2 T} \times \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \exp \left[-\frac{(x - \sigma^2 T/2)^2}{2\sigma^2 T} \right] dx}_R \right\} \end{aligned}$$

Le calcul de N donne :

$$N = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \left[\exp \left(-\frac{(x - \sigma^2 T/2)^2}{2\sigma^2 T} \right) \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2\pi\sigma^2 T} \exp \left[-\frac{\sigma^2 T}{8} \right]$$

Le calcul de R donne :

$$R = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \times \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \exp \left[-\frac{(x - \sigma^2 T/2)^2}{2\sigma^2 T} \right] dx$$

Soit le changement de variables : $y = \frac{x - \sigma^2 T/2}{\sqrt{\sigma^2 T}} \Rightarrow R = \frac{1}{2} \phi \left(\frac{\sqrt{\sigma^2 T}}{2} \right)$

On déduit : $M = \sigma^2 T(N + R) = \sqrt{\frac{\sigma^2 T}{2\pi}} \exp \left[-\frac{\sigma^2 T}{8} \right] + \frac{\sigma^2 T}{2} \phi \left(\frac{\sqrt{\sigma^2 T}}{2} \right)$

Enfin :

$$I = S(0)(K + L) = S(0) \left\{ 2\phi \left(\frac{\sqrt{\sigma^2 T}}{2} \right) + \sqrt{\frac{\sigma^2 T}{2\pi}} \exp \left[-\frac{\sigma^2 T}{8} \right] + \frac{\sigma^2 T}{2} \phi \left(\frac{\sqrt{\sigma^2 T}}{2} \right) \right\}$$

D'où :

$$P_0(K(T), S(T), T) = I - S(0)$$

$$P_0(K(T), S(T), T) = S(0) \left\{ \left(2 + \frac{\sigma^2 T}{2} \right) \phi \left(\frac{\sqrt{\sigma^2 T}}{2} \right) + \sqrt{\frac{\sigma^2 T}{2\pi}} \exp \left(-\frac{\sigma^2 T}{8} \right) - 1 \right\} \quad (\text{A.1})$$

□

Annexe B

Preuve de la formule fermée de Ghaidarov, 2014,

Preuve

$$\begin{aligned} P_0(K(T), S(T), T) &= e^{-rT} E_Q \left[S(0)e^{rT} - S(T) \right]^+ \\ &= e^{-rT} E_Q \left[\underbrace{S(0)e^{rT} \mathbb{1}_{S(0)e^{rT} \geq S(0)e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}\epsilon}}}_{I=S(0)\phi\left(\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}\right)} \right] - \underbrace{e^{-rT} E_Q[S(T)]}_J \end{aligned}$$

où $\epsilon \sim N(0, 1)$

Après quelques simples calculs, on a :

$$\begin{aligned} J &= S(0)\phi\left(-\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}\right) \\ &= S(0)\left\{1 - \phi\left(\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}\right)\right\} \end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned} P &= I - J \\ &= S(0)\left\{2\phi\left(\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}\right) - 1\right\} \end{aligned}$$

□

Annexe C

Preuve de la formule fermée de l'extension de Ghaidarov,

La preuve est similaire à celle présentée dans l'annexe B

$$P_0(K(T), S(T), T) = e^{-rT} E_{K_n} \left[E_Q \left((S(0)e^{rT} - S(T))^+ | K_n \right) \right] = E_{K_n} [BSP(K_n)] \quad (C.1)$$

Calcul de $BSP(K_n)$.

$$\begin{aligned} BSP(K_n) &= e^{-rT} E_Q \left[(S(0)e^{rT} - S(T))^+ | K_n \right] \\ &= \underbrace{e^{-rT} E_Q \left[S(0)e^{rT} \mathbb{1}_{S(0)e^{rT} \geq S(T)} | K_n \right]}_A - \underbrace{e^{-rT} E_Q \left[S(T) \mathbb{1}_{S(0)e^{rT} \geq S(T)} | K_n \right]}_B \end{aligned} \quad (C.2)$$

On notera au passage, que :

$$S(T) = S(0)e^{rT - \frac{\sigma^{*2}}{2}T + \sigma^* \epsilon}$$

avec

$$\sigma^* = \sigma^*(K_n) = \sqrt{K_n \sigma_1^2 + (n - K_n) \sigma_2^2}$$

Alors

$$\begin{aligned} A &= e^{-rT} E_Q \left[S(0)e^{rT} \mathbb{1}_{S(0)e^{rT} \geq S(T)} | K_n \right] \\ &= e^{-rT} E_Q \left[S(0)e^{rT} \mathbb{1}_{\epsilon < \frac{\sigma^*}{2}} | K_n \right] \\ &= S(0) \phi \left(\frac{\sigma^*}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= e^{-rT} E_Q \left[S(T) \mathbb{1}_{S(0)e^{rT} \geq S(T)} | K_n \right] \\ &= e^{-rT} E_Q \left[S(T) \mathbb{1}_{\epsilon < \frac{\sigma^*}{2}} | K_n \right] \\ &= S(0) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\sigma^*}{2}} e^{-\frac{1}{2}(x - \sigma^*)^2} \\ &= S(0) \phi \left(-\frac{\sigma^*}{2} \right) \end{aligned}$$

On déduit que

$$BSP(K_n) = S(0) \left\{ 2\phi \left(\frac{\sigma^*}{2} \right) \right\}$$

Annexe D

Preuve des formules fermées de CTE

Cas 1 : $S_n \sim LN(n\mu, \sqrt{n}\sigma)$ De façon générale et suivant Hardy [2003], on a :

$$\begin{aligned} CTE(\alpha, L) &= E[L|L > U_\alpha(L)] \\ &= E[(G - F_n)e^{-rn}|F_n < (G - U_\alpha(L))e^{rn}] \end{aligned}$$

Notant que $P[F_n < (G - U_\alpha(L))] = 1 - \alpha$, on a :

$$\begin{aligned} CTE(\alpha, (L)) &= \frac{e^{-rn}}{1 - \alpha} \left[\int_0^{G - U_\alpha(L)e^{rn}} (G - s)f_{F_n}(s)ds \right] \\ &= \frac{e^{-rn}}{1 - \alpha} \left(GF_{F_n}(G - U_\alpha(L)e^{rn}) - \int_0^{G - U_\alpha(L)e^{rn}} sf_{F_n}(s)ds \right) \\ &= e^{-rn} \left(G - \frac{1}{1 - \alpha} \int_0^{G - U_\alpha(L)e^{rn}} sf_{F_n}(s)ds \right) \end{aligned}$$

Preuve Dans le cas gaussien, quelques développements conduisent à :

$$\begin{aligned} CTE(\alpha, (L)) &= e^{-rn} \left[G - \frac{e^{n(\mu + \ln(1-m) + \sigma^2/2)}}{1 - \alpha} \right. \\ &\quad \left. \times \Phi \left(\frac{\ln(G - U_\alpha(L)e^{rn}) - n(\mu + \ln(1 - m) + \sigma^2)}{\sqrt{n}\sigma} \right) \right] \end{aligned}$$

Rappelons à présent d'après que $U_\alpha(L)$ est donnée explicitement par la relation 4.10. En substituant cette dernière dans l'équation précédente, on retrouve ainsi la relation 4.12 :

$$CTE(\alpha, L) = e^{-rn} \left[G - \frac{e^{n(\mu + \ln(1-m) + \sigma^2/2)}}{1 - \alpha} \Phi(-z_\alpha - \sqrt{n}\sigma) \right] \quad \square$$

Cas 2 : $S_n|K_n \sim RSLN(\mu^*(K_n), \sigma^*(K_n))$

Preuve Dans le cas où la dynamique du fonds est régie par un processus à changement de régime log-normal, la relation suivante demeure valable :

$$CTE(\alpha, L) = e^{-rn} \left(G - \frac{1}{1 - \alpha} \underbrace{\int_0^{G - U_\alpha(L)e^{rn}} sf_{F_n}(s)ds}_I \right)$$

Le calcul de I , donne, connaissant l'expression de f_{S_n} , (cf. relation 2.34) :

$$I = \int_0^{G-U_\alpha(L)e^{rn}} s f_{F_n}(s) ds = \sum_{K_n=0}^n p_n(K_n) \times \int_0^{G-U_\alpha(L)e^{rn}} \exp \left[-\frac{(\ln(s) - n \ln(1-m) - \mu^*(K_n))^2}{2\sigma^*(K_n)^2} \right] ds$$

Quelques développements conduisent à :

$$I = \sum_{K_n=0}^n p_n(K_n) (1-m)^n e^{\mu^*(K_n) + \frac{\sigma^*(K_n)^2}{2}} \Phi(D_{K_n})$$

avec $D_{K_n} = \frac{\ln(G - U_\alpha(L)e^{rn}) - n \ln(1-m) - \mu^*(K_n) - \sigma^*(K_n)^2}{\sigma^*(K_n)}$

Par suite, on déduit que :

$$CTE(\alpha, L) = e^{-rn} \left(G - \frac{(1-m)^n}{1-\alpha} \sum_{K_n=0}^n p_n(K_n) (e^{\mu^*(K_n) + \sigma^*(K_n)^2}) \Phi(D_{K_n}) \right) \quad \square$$

Bibliographie

- H. Akaike. Information theory as an extension of the maximum likelihood principle. *Proceedings of Second International Symposium on Information Theory*, pages 267–281, 1973.
- P. Alagidede and T. Panagiotidis. Modelling stock returns in africa’s emerging equity markets. *Working paper*, 2009.
- J. Appiah-Kusi and K. Menyah. Return predictability in african stock markets. *Review of Financial Economics*, 12 :247–270, 2003.
- V. Aïnou. *La gestion du risque de longévité et évaluation de produits dérivés*. PhD thesis, ISFA. Université Claude Bernard Lyon 1, 2013.
- L. Bachelier. Théorie de la spéculation. *Annales scientifiques de l’école normale supérieure*, 17 :21–88, 1900.
- N. P. B. Bollen. Valuing options in regime switching models. *Journal of Derivatives*, 6 : 38–49, 1998.
- T. Bollerslev. Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity. *Journal of Econometrics*, 31 :307–327, 1986.
- P. Boyle and T. Draviam. Pricing exotic options under regime switching. *Insurance : Mathematics and Economics*, 40(2) :267–282, 2007.
- A. Charpentier. *Mesures de risque*. notes de cours, journées d’études statistiques. 2010.
- A. Choudhury. A simple approximation to the area under standard normal curve. *Mathematics and Statistics*, 2(3) :147–149, 2014.
- J. Conrad and G. Kaul. Time variation in expected returns. *Journal of Business*, 61 : 409–425, 1988.
- H. A. David and H. N. Nagaraja. *Order Statistics*. Wiley Finance, 2003.
- S. Djankov, C. McLiesh, and A. Shleifer. Private credit in 129 countries. *NBER working paper*, 11078, 2005.
- U. Duru and A. Nyong. Why Africa Needs Green Bonds. *Africa Economic Brief*, 7(2), 2016.
- R. Engle. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of U.K inflation. *Econometrica*, 50 :987–1008, 1982.
- E. Fama. Random walks in stock market prices. *Financial Analysts Journal*, 21(5) :55–59, 1965.

- E. Fama. Efficient capital markets : A review of theory and empirical work. *Journal of Finance*, 25(2) :383–417, 1970.
- J. Finnerty. An average-strike put option model of the marketability discount. *The Journal of Derivatives*, 19(4) :53–69, 2012.
- L. Fisher. Some new stock market indices. *Journal of Business*, 39 :191–225, 1966.
- FSB. Discussion Document 47. Technical report, Financial Services Board, 01 2012.
- S. Ghaidarov. Analytical bound on the cost of illiquidity for equity securities subject to sale restrictions. *Journal of Derivatives*, 21(4) :31–48, 2014.
- S. Goldfeld and R. Quandt. A markov model for switching regression. *Journal of the American Statistical Association*, 53 :873–880, 1973.
- J. D. Hamilton. A new approach to the economic analysis of non-stationary time series. *Econometrica*, 57 :357–384, 1979.
- J. D. Hamilton. *Time Series Analysis*. Princeton : Princeton University Press, 1994.
- J. D. Hamilton and R. Susmel. Autoregressive conditional heteroskedasticity and changes in regime. *Journal of Econometrics*, 64, 1994.
- M. Hardy. *Investment guarantees-Modeling and Risk Management for Equity-Linked Life Insurance*. Wiley, 2003.
- J. M. Harrison. *Brownian Motion and Stochastic Flow Systems*. Wiley, 1985.
- R. C. Higgins. *Analysis for financial Management*. McGraw-Hill Companies, Third Edition, 1991.
- M. Jensen. Some anomalous evidence regarding market efficiency. *Journal of Financial Economics*, 6(2/3) :95–101, 1978.
- P. Jorion. *Value-at-Risk*. MC.Graw-Hill, 2007.
- C.-J. Kim. Dynamics linear models with markov-switching. *Journal of Econometrics*, 60 : 1–22, 1994.
- L. Laeven and G. Mojononi. Does judicial efficiency lower the cost of credit? *Journal of Banking and Finance*, 29 :1791–1812, 2005.
- K. Lim. Weak-form market efficiency and nonlinearity. *Applied economics letters*, 1-4, iFirst, 2007.
- F. A. Longstaff. Placing no-arbitrage bounds on the value of nonmarketable and thinly-traded securities. *Advances in Futures and Options Research*, 8 :203–228, 1994.
- F. A. Longstaff. How much can marketability affect security values? *Journal of Finance*, 50 :1767–1774, 1995.
- M. Magnusson and B. Wydick. How efficient are africa’s emerging stock markets? *Journal of Development studies*, 38(4), 2000.
- B. Malkiel. *A random walk down Wall Street*. W.W Norton & Compagny, New York, 1996.

- O. Masetti. Capital markets in sub-saharan africa. *Deutsche Bank Research*, October 2013.
- O. Masetti. African eurobonds, will the boom continues? *Deutsche Bank Research*, November 2015.
- M. Mecagni and S. Sourial. The egyptian stock market : Efficiency tests and volatility effects. *IMF Working paper*, WP/99/48, 1999.
- C. A. M. Mezui. Afrique : stimuler les marchés obligataires pour financer l'économie. *Analyse financière*, 57 :63, 2015.
- J. Mvogo. *Les politiques de développement financier en Afrique subsaharienne*. PhD thesis, Université Paris Dauphine, 2012.
- V. Naik. Option valuation and hedging strategies with jumps in volatility of asset returns. *Journal of Finance*, 2(42) :1960–1984, 1993.
- D. Nelson. Conditional heteroscedasticity in asset returns : A new approach. *Econometrica*, 59(2) :347–370, 1991.
- R. Quandt. The estimation of the parameters of a linear regression system obeying two separate regimes. *Journal of the American Statistical Association*, 53 :873–880, 1958.
- P. Raimbourg. L'évaluation des décotes d'illiquidité. *Analyse financière*, 57 :89–91, 2015.
- O. Ramond. Modélisation de l'inessibilité dans l'évaluation des plans optionnels d'avantages du personnel en IFRS 2. Master's thesis, Conservatoire National des Arts et Métiers, 2009.
- S. Royal. *Conférence de rentrée : Avancement des actions engagées et nouvelles initiatives*. Ministère de l'environnement, de l'énergie et de la mer (France), September 2016.
- P. Samuelson. Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly. *Industrial Management Review*, 6 :421–429, 1965.
- M. Scholes and J. Williams. Estimating beta from non-synchronous data. *Journal Of Financial Economics*, 5 :309–327, 1977.
- G. Schwartz. Estimating the dimension of a model. *Annals of Statistics*, 6(2) :461–464, 1978.
- T. Siu, C. Erlwein, and R. Manon. The pricing of credit risk default under a markov-modulated merton's structural model. *North American Acturial Journal*, 12(1) :19–46, 2008.
- G. Smith and K. Jefferis. The changing efficiency of african stock markets. *South African Journal of Economics*, 73(1), 2005.
- R. Staub. Modelling illiquidity premium for alternative investments. *CFA Institute Conference Proceedings Quarterly*, 27(2), June 2010.
- Student. The probable error of a mean. *Biometrika*, 6(1) :1–25, March 1908.