

Mémoire présenté le : 14 juin 2018
pour l'obtention du diplôme
de Statisticien Mention Actuariat
et l'admission à l'Institut des Actuaires

Par : Ineze ELAHEEBUCUS

Titre du mémoire :
**Réflexion sur les rachats dynamiques : nouvelle
approche et modélisation**

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

*Membres présents du jury de
l'Institut des Actuaires*

signature

Entreprise : Generali

Nom : Pierre CORREGE

*Membres présents du jury de la
filière*

Olivier WINTENBERGER

Signature :

*Directeur de mémoire en
entreprise :*

Nom : Florian BOULLAY

Signature :

Invité :

Nom :

Signature :

*Autorisation de publication et de mise
en ligne sur un site de diffusion de
documents actuariels (après expiration
de l'éventuel délai de confidentialité)*

Signature du responsable
entreprise

Signature du candidat

Table des matières

Résumé	5
Abstract	6
Remerciements	7
Introduction	8
Partie I : Contexte de l'étude et généralités	11
1. Tour d'horizon du contrat d'assurance vie	12
1.1. Premières notions et caractéristiques	12
1.1.1. Le contrat d'assurance vie	12
1.1.2. Spécificités	14
1.2. Les principaux types de supports	17
1.2.1. Les contrats mono-support	17
1.2.2. Les contrats multi-supports	21
1.3. L'option de rachat	22
1.4. La fiscalité associée au contrat d'assurance vie	23
1.4.1. Historique	24
1.4.2. Mode d'imposition	25
1.4.3. Assiette d'imposition selon le type de rachat	26
2. Le cadre réglementaire	28
2.1. Les normes IFRS	28
2.2. L'environnement Solvabilité 2	29
2.2.1. Les directives prudentielles	29
2.2.2. Le risque de rachat	31
2.3. Les rachats dynamiques selon la QIS5	31
2.3.1. La loi standard	31
2.3.2. Les lois ONC	33
2.3.3. Importance de la considération des rachats dynamiques	34
2.3.4. La question de la gouvernance	35
3. Problématique	36

Partie II : Étude préalable et dissociation des rachats	37
4. Le risque de rachat chez Generali : la vision du modèle interne	38
4.1. Les lois de rachats structurels	38
4.2. La loi de rachats dynamiques	38
5. La base de données	40
5.1. Collecte des données	40
5.2. Calcul des taux de rachat	41
6. Analyses qualitatives et quantitatives	43
6.1. Les taux de rachat historiques	43
6.2. L'ancienneté fiscale	44
7. Étude des périodes de crise	46
7.1. Historique des crises	46
7.2. Outil statistique de base : le boxplot	46
7.3. Rapprochement avec la théorie des valeurs extrêmes	48
7.3.1. Théorie : le Mean Excess Plot	48
7.3.2. Application	49
7.3.3. Résultats	50
7.4. Autres méthodes	52
8. Analyse de la tendance et de la saisonnalité	53
8.1. Une double ANOVA à un facteur	53
8.2. Détection de la saisonnalité : l'autocorrélogramme simple	56
9. Dissociation des rachats conjoncturels et structurels	60
9.1. La transformée de Fourier rapide	60
9.1.1. Théorie	60
9.1.2. Application	62
9.1.3. Limites de la méthode	65
9.2. Le lissage exponentiel de Holt-Winters	65
9.2.1. Théorie	65
9.2.2. Application	67
9.2.3. Limites de la méthode	68
Partie III : Modélisation de la loi de rachats dynamiques	70
10. Choix des variables explicatives	71
10.1. Préselection de variables et étude de corrélation	71
10.2. Application	72

10.3. Confrontation avec les taux de rachat	76
10.4. Mesure des élasticités	78
11. Modèle de régression linéaire simple	81
11.1. Théorie	81
11.2. Application	84
12. Modèle de régression polynomiale	87
12.1. Théorie	87
12.2. Application	89
13. Choix du modèle	91
13.1. Analyse des résidus	91
13.2. Le coefficient de détermination	97
13.3. Akaike Information Criterion (AIC)	98
14. Impacts financiers des rachats dynamiques	100
14.1. Le progiciel Prophet	100
14.2. Indicateurs financiers	101
14.3. Résultats de la modélisation	104
15. Limites de notre étude	108
Conclusion	116
Bibliographie	118
Table des figures	119

Résumé

Le phénomène de rachat constitue l'un des risques majeurs qui planent autour de l'activité d'assurance. Dans la mesure où ce dernier est directement lié au comportement des assurés, le risque qu'il engendre est difficilement appréhendable. Le cadre réglementaire Solvabilité 2 et les normes comptables IFRS (dont la dernière évolution en date est IFRS 17) imposent aux compagnies d'assurance d'évaluer leurs passifs au plus juste et leur demandent en particulier de tenir compte du coût des options et garanties qui comprend notamment le coût de l'option de rachat. Par ailleurs, elles sont également tenues de quantifier et piloter les différents risques auxquels elles peuvent être confrontées à travers le calcul du SCR.

Les études quantitatives réalisées en préparation de la mise en place des directives Solvabilité 2 et les textes réglementaires proposent aux compagnies d'assurance plusieurs pistes afin qu'elles soient en mesure de mieux contenir le risque de rachat. Nous avons retenu en particulier l'hypothèse de dualité de la nature des rachats qui constitue le fil d'Ariane de notre étude.

Ce mémoire se base sur des données agrégées et s'appuie sur des variables macroéconomiques afin de modéliser les rachats dynamiques. Après une analyse générale de notre historique de rachats, nous vérifions à l'aide de la Théorie des Valeurs Extrêmes l'existence d'un lien entre les rachats observés et les perturbations de l'environnement économique. Notre objectif étant de modéliser uniquement les rachats dynamiques, nous réfléchissons aux moyens de les isoler. Nous utilisons pour cela deux approches différentes l'une empruntée à la théorie du traitement du signal et l'autre aux études de séries temporelles. Une fois les rachats dynamiques dissociés des rachats structurels, nous entamons le processus de modélisation.

La modélisation standard des rachats dynamiques se base sur l'écart entre le taux servi par l'assureur et un taux concurrentiel. Nous prenons le parti de proposer une toute nouvelle forme de modélisation en nous affranchissant de cette dernière. Cela implique donc la recherche et la sélection de nouvelles variables explicatives pertinentes. Nous explorons d'abord un modèle de régression linéaire que nous améliorerons grâce à un ajustement polynomial. L'objectif final étant de proposer une modélisation plus fidèle au portefeuille de contrats de l'entreprise.

Mots-clés : rachats dynamiques, Solvabilité 2, conjoncture économique, Théorie des Valeurs Extrêmes, dissociation, Transformée de Fourier Rapide, lissage exponentiel de Holt-Winters, modélisation, régression linéaire, régression polynomiale

Abstract

The surrender phenomenon constitutes one of the main risks which surround the insurance activity. As surrenders are directly related to the customers' behavior, the underlying risk is difficult to understand. The Solvency 2 framework and the IFRS accounting standards (which latest development is IFRS 17) require the insurance companies to assess their liabilities fairly and want them to take into account the cost of options and guarantees which includes the cost of the surrender option. Moreover, they are also asked to quantify and manage the various risks they may face through the calculation of the SCR.

The Quantitative Impact Studies done in preparation of the implementation of the Solvency 2 guidelines and the official texts provide to the insurance companies several hints to better control the surrender risk. In particular, we have focused and developed our study on the hypothesis of the duality of surrenders' nature.

This master thesis is based on aggregated data and uses macroeconomic variables to model dynamic surrenders. After a general analysis of our surrenders' historical data, we use the Extreme Values Theory to highlight the existence of a link between surrenders and disruptions in the economic environment. As our goal is to model dynamic surrenders only, we think about ways to isolate them. For this we use two different approaches, one borrowed from signal theory and the other one from time series studies. Once we have dissociated the dynamic surrenders from the structural surrenders, we then start the modeling process.

The standard modeling of dynamic surrenders is based on the difference between the insurer's credited rate and a competitive rate. We take the decision to propose a new form of modeling by freeing ourselves from the classic modeling. This implies the research and selection of new relevant explanatory variables. We first explore a linear regression model that we will improve with a polynomial fit. The ultimate goal is to provide a more reliable model that reflects the company's portfolio.

Keywords : dynamic lapses/surrenders, Solvency 2, economic environment, Extreme Value Theory, dissociation, Fast Fourier Transform, Holt-Winters exponential smoothing, modeling, linear regression, polynomial regression

Remerciements

Je remercie en premier lieu mon maître de stage, Florian BOULLAY, qui a su rendre mon expérience au sein de GENERALI France enrichissante et stimulante. Je le remercie aussi pour son encadrement de qualité et sa confiance qui m'ont permis d'avancer dans la construction et l'aboutissement de ce mémoire.

Je tiens également à témoigner ma gratitude envers Pierre CORREGE et Raphaëlle DELARBRE pour leur esprit critique et leur regard d'experts sur ce sujet ainsi qu'à mon tuteur académique, Olivier WINTENBERGER, pour sa relecture.

Un grand merci à Kévin FARNAULT et Camille BARRAS pour leur aide précieuse lors du traitement des données, à Cheikh DABO pour sa clairvoyance, à Mohamed et Tamim SELMAOUI pour leurs conseils ainsi qu'à tous les membres de l'équipe de la Valeur pour leur disponibilité et leur convivialité.

Enfin je souhaite tout particulièrement remercier ma mère ainsi que ma famille pour leur soutien infaillible durant la conception et la rédaction de ce mémoire.

Introduction

L'assurance vie est depuis de nombreuses années le placement préféré des français. La popularité de ce produit vient en particulier de ses caractéristiques qui lui permettent de répondre à la fois aux besoins de liquidité, de rendement et de sécurité financière qu'éprouvent les assurés. Avec plus de 54 millions de contrats souscrits en 2016 et un encours à hauteur de 1 632 milliards d'euros¹, soit environ 74% du déficit national, l'assurance vie a su grâce à sa flexibilité rester un produit fiable et ce malgré la succession de crises auxquelles l'économie a dû faire face ces dernières années. L'attrait des français pour cette forme d'épargne connaît toutefois un essoufflement largement imputable au contexte de taux bas auquel le marché se voit confronté depuis plusieurs années déjà, mais aussi à une fiscalité toujours plus contraignante qui fragilisent les avantages qu'offre ce type de produit aux assurés.

L'option de rachat participe à cet engouement pour l'assurance vie en garantissant notamment une certaine liquidité aux détenteurs de contrats. Bien que cette garantie soit un facteur rassurant pour les assurés, elle peut constituer un risque financier non négligeable pour l'assureur. En effet, l'activité des compagnies d'assurance étant intimement liée au contexte économique et financier, une mauvaise appréhension du phénomène de rachat peut affecter la gestion actif-passif ainsi que les réserves de la compagnie d'assurance mais également mettre en péril sa solvabilité voire la pérennité de son activité. Ainsi, lors d'un rachat de masse l'assureur peut se retrouver dans l'incapacité d'honorer les engagements pris auprès de ses assurés et risque dans le pire des scénarios une mise sous tutelle ou bien un arrêt forcé de toute activité. D'autres conséquences peuvent être envisagées, par exemple en cas de rachats massifs précipités, l'assureur est susceptible de ne pas pouvoir amortir ses frais d'acquisition ce qui pourrait provoquer des pertes conséquentes pour la compagnie.

La décision d'exercer l'option de rachat est la plupart du temps motivée par des raisons personnelles (besoin de financement d'un projet immobilier ou arbitrage vers un produit plus rentable par exemple) et de ce fait, difficilement prévisible. Les facteurs expliquant ces flux de rachats peuvent être endogènes, c'est-à-dire liés aux caractéristiques inhérentes aux contrats ou aux caractéristiques individuelles des assurés, ou bien exogènes soit en d'autres termes qui ne dépendent ni des produits, ni des assurés. Dès lors, nous pouvons imaginer que les mouvements de rachats peuvent se diviser en deux composantes de natures bien distinctes : une composante prévisible liée à des facteurs endogènes et une composante aléatoire liée à des facteurs exogènes. C'est la vision adoptée par la réglementation. Ainsi, les rachats historiquement constatés se décomposent en rachats prévisibles dits « structurels » qui reflètent le comportement moyen des assurés et en rachats dits « conjoncturels » (ou « dynamiques ») dont l'occurrence et l'ampleur sont incertaines.

1. Chiffres de la Fédération Française des Sociétés d'Assurance (FFSA).

L'environnement prudentiel Solvabilité 2 accorde une attention toute particulière au risque de rachat. Alors que les rachats structurels sont majoritairement modélisés en fonction de l'ancienneté des contrats, les rachats dynamiques sont eux plus difficilement appréhendables. Les études quantitatives effectuées en préparation de la mise en place du cadre réglementaire Solvabilité 2 proposent toutefois une loi standard de rachats dynamiques principalement expliqués par les écarts de rendements avec les taux servis par la concurrence. Cette loi de rachats calibrée sur un certain nombre de compagnies d'assurance est utilisable par tous mais n'est pas spécifiquement représentative de l'activité de chaque compagnie. La réglementation impose aux assureurs d'intégrer les rachats dans le calcul du coût des options et garanties afin d'évaluer au plus juste le passif de leurs bilans. Nous comprenons ainsi que la prise en compte ou non des rachats influe directement sur le volume des provisions techniques de l'assureur, c'est-à-dire sur ses engagements auprès de ses assurés, et que ce dernier a donc tout intérêt à développer sa propre loi de rachats dynamiques.

En 2012, Eling et Kochanski étudient la littérature empirique portant sur divers produits d'assurance vie de différents pays et divisent celle-ci en deux grandes catégories : les travaux basés sur des données individuelles qui utilisent les informations disponibles relatives aux assurés et les travaux basés sur des données agrégées qui s'appuient uniquement sur des variables macroéconomiques. L'analyse que nous développons à travers ce mémoire se place dans cette seconde catégorie. De plus, nous proposons ici une approche peu explorée par le passé en tentant non pas de modéliser directement les rachats dynamiques à partir de l'historique de rachats globaux mais en essayant de modéliser le phénomène de rachats dynamiques en les ayant préalablement dissociés des rachats structurels évalués à partir de l'historique des rachats constaté.

Pour cela nous introduisons dans un premier temps les notions de base relatives aux contrats d'assurance vie et nous présentons le cadre réglementaire dans lequel évoluent ces contrats afin de bien définir le contexte de notre analyse. Nous restreignons notre étude aux rachats totaux constatés sur le périmètre Épargne - EURO de Generali. De plus nous portons dans cette première partie une attention particulière à la fiscalité qui s'applique aux rachats. Enfin, nous présentons la loi de rachats dynamiques proposée aux compagnies d'assurance par le régulateur afin que celles-ci puissent les quantifier et mieux appréhender le risque de rachat.

Dans la seconde partie de ce mémoire, après avoir décrit la prise en compte des rachats dans l'entreprise et les données dont nous disposons pour notre étude, nous procédons à une analyse quantitative et qualitative de base des rachats observés dans le but d'avoir une vision globale du phénomène. En particulier, nous nous intéressons à l'éventuelle existence de tendance et de saisonnalité dans nos données. Nous utilisons alors une technique non paramétrique, à savoir une ANOVA à un facteur, et l'autocorrélogramme de notre historique de rachats pour tenter de mettre en évidence ces deux composantes déterministes. Nous menons par la suite une étude précise des périodes de crise en nous rapprochant des méthodes employées en théorie des valeurs extrêmes et dont les conclusions seront essentielles dans l'explication des rachats dynamiques. Pour finir, nous tentons de séparer les

phénomènes de rachats structurels et rachats dynamiques en nous appuyant sur deux méthodes de dissociation, la première empruntée à la physique et la seconde empruntée aux études de séries temporelles.

La dernière partie de ce mémoire est consacrée à la modélisation des rachats dynamiques. Dans un premier temps nous nous attellerons à la recherche de variables explicatives pertinentes qui seront indispensables au moment de la modélisation des rachats dynamiques. Nous sélectionnons nos variables à l'aide d'une étude de corrélation sur période segmentée. Nous proposons ensuite deux modèles de régression dont nous testons la validité. Le modèle retenu nous permettra alors de quantifier l'impact financier des rachats dynamiques sur le passif de la compagnie suite à son implémentation dans la plate-forme actuarielle de cette dernière. Nous concluons alors ce mémoire en comparant notre loi à celles déjà existantes.

NB : *Ce mémoire étant confidentiel, les données sensibles ont par conséquent été masquées.*

Partie I : Contexte de l'étude et généralités

1. Tour d’horizon du contrat d’assurance vie

Avant tout propos, il paraît essentiel d’introduire et de définir les notions de base utiles en assurance vie, ainsi que le cadre réglementaire dans lequel évoluent les contrats qui y sont rattachés. Pour cela, nous rappellerons les caractéristiques fondamentales qui font de l’assurance vie un produit particulièrement apprécié des français. Nous définirons ensuite l’environnement réglementaire qui entoure à la fois les contrats qui y sont associés et le risque de rachat. Pour finir, nous développerons la problématique qui motive la rédaction de ce mémoire.

1.1 Premières notions et caractéristiques

1.1.1 Le contrat d’assurance vie

Définition générale

Le contrat d’assurance vie est par définition, un accord, à travers lequel une compagnie d’assurance s’engage auprès d’un souscripteur à verser des prestations au bénéficiaire du contrat. Le déclenchement de ces prestations est conditionné par la réalisation d’un risque aléatoire supporté par une tête assurée. En contrepartie, le souscripteur du contrat s’engage à verser à l’assureur des cotisations, aussi appelées primes. Les modalités de versement des prestations et des cotisations dépendent du type de contrat et sont définies au moment de la souscription de ce dernier².

Segmentation des contrats d’assurance vie

La diversité et l’exhaustivité des produits d’assurance vie oblige l’assureur à classer ces derniers en différentes lignes d’affaires (Line of Business – LoB) cela afin de simplifier et de faciliter les calculs des différents postes du bilan mais aussi pour des raisons de clarté et de communication. Il existe de ce fait plusieurs façons de classer les contrats d’assurance vie. Nous ne citerons dans les paragraphes qui suivent que les deux principales.

Garanties en cas de vie et en cas de décès

2. Le lecteur intéressé pourra se référer à l’*article L. 310 – 1 du Code des Assurances* ^[1] pour une définition plus rigoureuse.

La nature du risque couvert par l'assureur permet de distinguer deux grands types de contrats : le contrat d'assurance vie en cas de vie et le contrat d'assurance vie en cas de décès.

Dans le premier cas, le versement de la prestation est lié à la survie de la tête assurée au-delà d'une certaine date. Cette dernière est définie à l'avance par les deux parties lors de l'adhésion au contrat. On notera que l'individu portant le risque peut également se révéler être l'un des bénéficiaires du contrat, tout comme le souscripteur.

Par opposition à ce type de contrat, le contrat d'assurance vie en cas de décès donne droit au versement de la prestation dès lors que la tête assurée décède. Il apparaît clairement ici que ni le souscripteur, ni la personne portant le risque ne peuvent être nommés comme bénéficiaires du contrat. Dans les deux cas, les prestations peuvent prendre la forme soit d'un capital soit d'une rente qui sera versée aux ayants droit après réalisation du risque.

Au-delà de cette segmentation viagère des contrats d'assurance vie, il existe des contrats à garantie mixte qui couvrent à la fois les deux types de risques et cela dans des proportions plus au moins égales. Dans la pratique, ce type de contrat garantit le versement de la prestation au bénéficiaire si l'assuré décède pendant la durée du contrat. Autrement, la prestation (capital ou rente) revient à l'assuré si ce dernier est toujours en vie au terme du contrat.

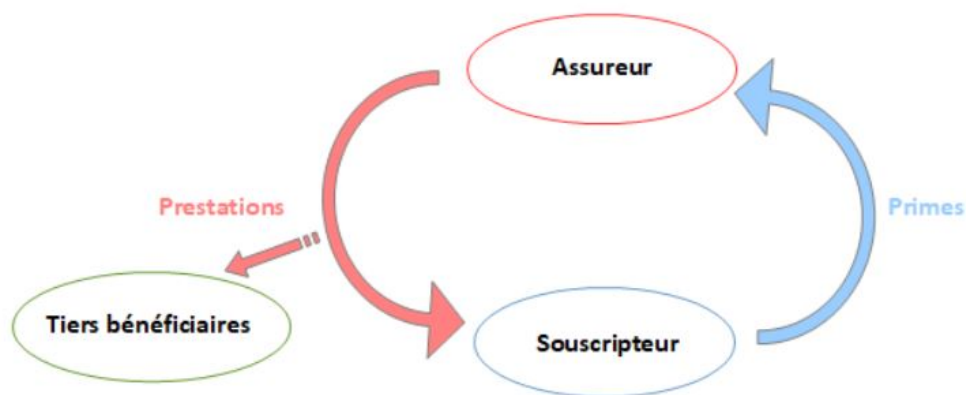


FIGURE 1.1 – Schéma synthétique : assurance vie en cas de vie

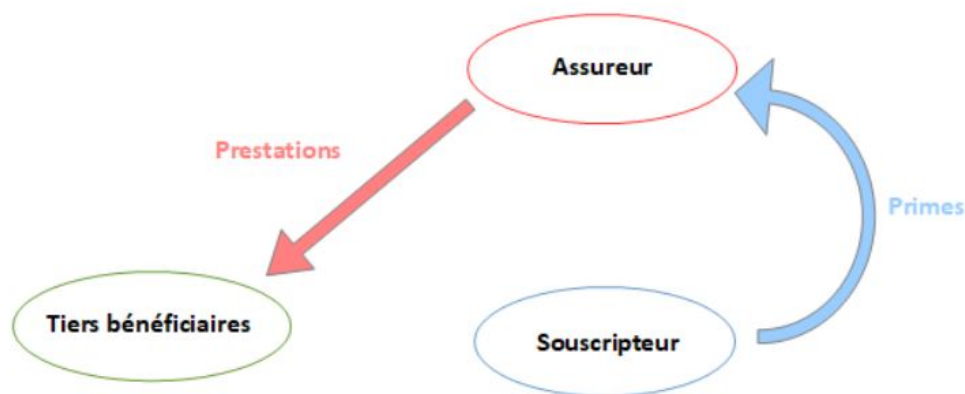


FIGURE 1.2 – Schéma synthétique : assurance vie en cas de décès

Contrats individuels et collectifs

Les contrats d'assurance vie peuvent aussi être segmentés selon le nombre de signataires, donnant ainsi naissance à trois autres grandes catégories :

- L'assurance vie individuelle : seulement deux individus sont impliqués à la signature du contrat, l'assureur et l'assuré. Cependant d'autres personnes peuvent être couvertes par le contrat, ce sont les ayants droit. Ce schéma peut être observé en santé par exemple.
- L'assurance vie collective : dans ce cas, le contrat relie l'assureur à un groupe de personnes (généralement une entreprise). Il y a donc autant de signataires que d'adhérents et les clauses du contrat concernent tout ou partie des membres du groupe, c'est le cas par exemple des contrats de prévoyance.

L'assurance vie se décline ensuite en plusieurs produits. Les produits proposés sont variés et pour la plupart communs aux deux branches. Ainsi, certains produits se retrouvent tant en assurance individuelle qu'en assurance collective. Parmi les principaux produits, on retrouve les contrats d'épargne, de retraite, de santé, de prévoyance, de dépendance ou encore les contrats emprunteurs.

Dans la suite de ce mémoire nous entendrons par assurance vie, l'assurance vie au sens « épargne individuelle ».

1.1.2 Spécificités

Vocation des contrats d'assurance vie

De par sa définition, un produit d'assurance vie peut être vu comme un moyen d'épargne à plus ou moins long terme qui grâce à sa souplesse et à la variété de ses garanties, permet de répondre

aux attentes des assurés. En effet, la souscription d'un contrat d'assurance vie peut être motivée par différents besoins comme par exemple :

- se constituer un complément de retraite ;
- se prémunir contre les aléas en se construisant une épargne de précaution ;
- financer des projets futurs ;
- transmettre son patrimoine.

Durée du contrat

Lors de l'adhésion, le souscripteur a la possibilité de choisir la durée de son contrat et ce, sans aucune contrainte légale. Son choix repose souvent sur ses objectifs personnels mais nous verrons par la suite que la fiscalité peut entrer en jeu dans sa décision et que par conséquent la durée de vie moyenne d'un contrat d'assurance vie tourne le plus souvent autour de 10 ans.

Par défaut, la durée d'un contrat d'assurance vie est viagère, c'est-à-dire qu'elle est indéterminée et donc que le contrat prendra fin au moment du décès de la tête assurée ou bien par anticipation suite à un rachat total.

La deuxième possibilité est d'opter pour une durée fixe ou déterminée. Dans ce cas, le contrat prendra normalement fin à la date d'échéance prévue, autrement il s'achèvera au décès de la tête assurée ou encore suite au rachat total du contrat. Si le souscripteur ne rachète pas son contrat et est toujours en vie à la date d'échéance prévue, le contrat est automatiquement prorogé et ce de manière annuelle sauf en cas d'opposition de sa part. De ce fait, bien qu'il soit possible de passer en cours de contrat d'une durée fixe à une durée viagère, il n'apparaît pas utile d'effectuer ce changement. A contrario, passer d'une durée viagère à une durée fixe en cours de contrat est impossible.

La gestion des cotisations

Le souscripteur alimente son contrat d'assurance vie à travers les primes (ou cotisations) qu'il verse à l'assureur. Ces primes peuvent être récoltées par l'assureur selon trois modalités de versement :

- Le versement périodique ou programmé : au moment de la souscription du contrat, les deux parties se mettent d'accords sur un calendrier de versement et sur le montant des primes à verser. Ces dernières sont émises par le souscripteur à des échéances déterminées et régulières selon un pas mensuel ou annuel par exemple. Les versements complémentaires sont autorisés et peuvent être émis à toute date.
- Le versement libre : ce type de versement est moins contraignant pour le souscripteur car lui seul décide du montant de la cotisation et de la date à laquelle il souhaite alimenter son contrat. Toutefois, certains contrats imposent un montant minimal de prime.

- Le versement unique : comme son nom l'indique, l'assureur ne perçoit qu'une seule prime (d'où l'appellation « prime unique ») de la part du souscripteur au moment de la signature du contrat.

Avantages

La popularité des contrats d'assurance vie est fortement liée aux avantages qu'ils offrent. Nous n'en citerons que quelques-uns parmi d'autres.

- Le choix de la tête assurée : le souscripteur est libre de désigner la ou les personnes qui porteront le risque.
- La clause bénéficiaire : à travers cette clause, le souscripteur a la possibilité de choisir la ou les personnes qui percevront les prestations à la réalisation du risque.
- La flexibilité de gestion des cotisations (voir paragraphe précédent).
- La rémunération inhérente au contrat : les contrats sont rémunérés suivant un *Taux Minimum Garanti* (TMG) auquel s'ajoute la *participation aux bénéfices*.
- Les avantages fiscaux : l'épargne constituée est exempt d'impôts, de plus les plus-values sont exonérées d'impôt sur le revenu, enfin la transmission patrimoniale peut également bénéficier d'une exonération fiscale conséquente.

Les deux derniers points seront détaillés par la suite.

Les chargements de l'assureur

Les contrats d'assurance vie sont soumis à des prélèvements destinés à rémunérer partiellement l'activité de l'assureur. En effet, l'assureur applique des chargements aux contrats présents dans son portefeuille. À la souscription d'un nouveau contrat, l'assureur prélève des chargements dits d'acquisition qui correspondent aux coûts internes et externes, directement et indirectement imputables à l'ouverture du contrat. Ces coûts comprennent par exemple, les commissions d'acquisition, les frais d'ouverture de dossier ou encore les frais de publicité. Se succèdent à ces chargements, les chargements de gestion qui sont généralement prélevés sur les encours. Ces derniers ont pour principal motif la rémunération du pilotage du contrat et des opérations qui y sont liées et ce tout au long de la vie du contrat dans le portefeuille de l'assureur. D'autres chargements plus exotiques peuvent intervenir. Nous pouvons prendre l'exemple des chargements d'arbitrage en assurance vie multi-supports qui peuvent être déduits de l'encours lors d'un éventuel changement de support.

1.2 Les principaux types de supports

Les contrats d'épargne peuvent être subdivisés en deux types de contrats : les contrats *mono-support* et les contrats *multi-supports*, le terme *support* désignant la nature du fonds sur lequel l'encours sera investi. Ces deux catégories de contrats reflètent une prise de risque différentes de la part de l'assureur et de l'assuré.

1.2.1 Les contrats mono-support

Il existe en assurance vie deux principaux types de supports, les supports en devise (ici l'euro) et les supports en unité de compte (UC). Les contrats mono-support proposent à l'assuré de placer ses cotisations sur un seul type de support.

Les contrats en euro

Les contrats d'assurance vie en euro sont adossés à un fonds général (ou fonds en euro) dans lequel le capital accumulé est investi majoritairement dans des actifs considérés comme étant sûrs tels que des obligations d'emprunt d'État ou bien des obligations d'entreprise. En général, la part de l'actif réservée aux obligations tourne autour de 80%, le reste correspond à des placements en actions, immobiliers ou monétaires peu risqués. Par ailleurs, l'assureur met un point d'honneur à respecter le principe de diversification cela afin de minimiser le risque de marché qu'il est le seul à supporter pour ce type de produit. Les contrats en euro sont de ce fait destinés à des individus prudents, qui ont une aversion au risque assez forte et qui souhaitent par conséquent être le moins exposés au risque. En effet, le seul risque que l'assuré supporte est le risque de faillite de l'assureur.

La sécurité n'est pas l'unique attrait de ces contrats. Une autre de leurs particularités est de garantir une revalorisation minimum des fonds investis ainsi qu'une participation aux bénéfices.

Revalorisation des contrats

Chaque année les contrats en euro sont rémunérés grâce à un *taux de revalorisation* à travers lequel l'assureur s'engage à faire progresser le capital de l'assuré sur un an d'immobilisation. Le taux de revalorisation se décompose en : un *Taux Minimum Garanti* (TMG) qui n'est plus vraiment d'actualité du fait de l'environnement de taux bas auquel nous sommes confrontés, et une participation aux bénéfices. Ce mécanisme met en exergue l'effet mémoire associé aux contrats en euro, du fait de la réinjection des intérêts dans les sommes investies.

Le TMG est un taux contractuel proposé aux assurés au bon vouloir de l'assureur, qui est fixé à l'ouverture du contrat. L'assureur garantit à travers ce denier, que la valeur finale du capital investi

sera au moins égale à sa revalorisation par ce même taux. Les compagnies d'assurance ont longtemps utilisé le TMG comme argument commercial. Toutefois en raison du niveau historiquement bas des taux longs, ce dernier tend à disparaître car dans ce contexte particulier il représente une menace pour la solvabilité des assureurs. A contrario, du point de vue des assurés, le TMG fait partie des avantages liés aux contrats d'assurance vie. De ce fait, la disparition de ce dernier peut devenir un motif de rachat. Une étude de l'ACPR datant de 2014 ^[6] montre que sur l'année 2013 près de 69% des provisions mathématiques présentent un taux technique inférieur ou égal à 0,2%. De plus, un TMG inférieur ou égal à 1,2% s'applique à plus de 80% des provisions mathématiques.

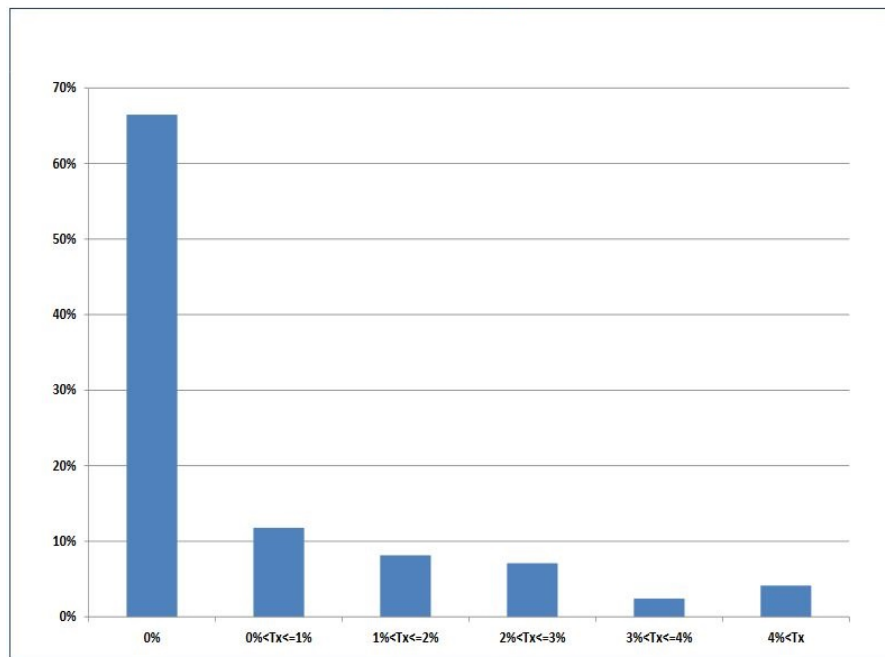


FIGURE 1.3 – Répartition des encours de provisions mathématiques selon le TMG en 2013

Le Code des Assurances dépeint les règles de détermination du TMG et limite également sa valeur (voir l'Article A132-3). Ce cadre légal a pour but d'éviter tout abus pouvant mener à une concurrence déloyale et de contenir le risque de solvabilité auquel sont exposés les compagnies d'assurance.

L'autre composante du taux de revalorisation est la Participation aux Bénéfices (PB). Avant de détailler le principe de la participation aux bénéfices, revenons brièvement sur le fonctionnement de base de l'activité d'assurance qui se démarque des autres sociétés commerciales « *plus traditionnelles* ».

Principe de l'activité d'assurance

L'activité d'assurance se caractérise par un cycle inversé de production. En effet, l'assureur reçoit dans un premier temps les primes de la part des assurés qui ont pour objectif se prémunir contre d'éventuels sinistres futurs. En contrepartie, l'assureur s'engage à couvrir les risques supportés par

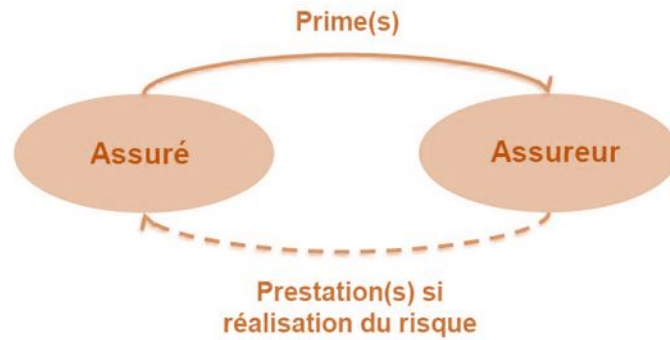


FIGURE 1.4 – Principe de fonctionnement d’une compagnie d’assurance

les assurés qui figurent dans leurs contrats. À la réalisation du risque, l’engagement de l’assureur prend la forme de prestations qu’il verse aux assurés sinistrés. Pour être en mesure de respecter ses engagements, l’assureur, après avoir prélevé ses frais, investit les primes qu’il perçoit pour les faire fructifier dans le temps, c’est la gestion par capitalisation, ou bien il les utilise pour régler les sinistres de l’année, on parle alors de gestion par répartition. Plus concrètement, l’assureur calcule le prix de vente (primes) avant de connaître le coût de revient (prestations). La tarification des produits d’assurance se doit donc d’être à la fois prudente et précise car les primes encaissées doivent permettre de couvrir les prestations futures et l’activité économique de l’assureur. Autrement dit, les engagements de l’assureur doivent équilibrer les engagements des assurés et cela à toute date. Cet équilibre doit donc tenir compte des flux futurs actualisés et de leurs probabilités de réalisation. L’outil mathématique permettant de représenter cette égalité est la *Valeur Actuelle Probable* (VAP). La VAP de l’assureur (noté A) (resp. assuré (noté a)) s’écrit comme l’espérance de la somme actualisée des engagements de l’assureur (resp. assuré). Nous obtenons donc l’égalité suivante à la date de souscription $t = 0$:

$$\text{VAP}(0, A) = \text{VAP}(0, a)$$

Cette égalité permet de calculer une prime pure, c’est-à-dire une prime exempte de frais de gestion, d’acquisition et de la rémunération des fonds propres. Lorsque ces trois composantes sont incorporées à cette dernière, on obtient la prime commerciale qui est la prime connue et payée par les assurés. Notons également que l’actualisation des flux se fait via un taux technique qui selon l’*Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution* (ACPR)^[7] est « un paramètre contractuel fondamental, [...] encadré par le Code des Assurances, [...] qui est souvent assimilé à un taux de rendement minimum garanti pour toute la vie du contrat » (juin 2016).

Si cet équilibre est vérifié à la date de souscription, ce n’est plus le cas à des dates ultérieures. Or chaque année l’assureur est soumis à des obligations de reporting bilanciel et doit de ce fait calculer au plus juste le résultat final de ses souscriptions. Nous introduisons donc la notion de *Provision Mathématique* (PM) qui sert à palier l’éventuel déséquilibre entre les VAP. La PM est une réserve constituée par l’assureur qui est alimentée par les primes pures des assurés et qui permet de garantir à

tout moment le règlement intégral de ses engagements. Le *Codes des Assurance* définit la PM comme étant « la différence entre les valeurs actuelles des engagements respectivement pris par l'assureur et les assurés ». Mathématiquement la PM se traduit comme suit :

$$PM(t) = VAP(t, A) - VAP(t, a)$$

La participation aux bénéfices

Le calcul de la participation aux bénéfices fait intervenir les résultats technique et financier de l'assureur et prend la forme d'un taux contractuel. En accord avec les principes dictés par le *Chief Financial Officers (CFO) Forum*, l'assureur est tenu de verser aux assurés un taux de PB minimum se définit comme suit :

$$PB_{min} = (85\% \text{ ou plus}) \text{ des produits financiers} \\ + \begin{cases} (90\% \text{ ou plus}) \text{ du résultat technique si positif} \\ (100\%) \text{ du résultat technique si négatif} \end{cases} \quad (1.1)$$

Afin de respecter la participation minimale de 85% associée au résultat financier, l'assureur constitue une réserve qui lui est spécialement dédiée et qui porte le nom de *Provision pour Participation aux Bénéfices* (PPB). L'assureur dispose d'un délais de 8 ans glissants pour distribuer la PB aux assurés sous peine de pénalité fiscale en cas de non respect de cette limitation. Nous soulignons le fait que la PPB appartienne aux assurés et que par conséquent si l'assureur excède la limite des 8 ans, il sera imposé sur des montants qui ne lui appartiennent pas. Notons que les montants provisionnés au titre de l'exercice de l'année N peuvent être utilisés pour servir les TMG de cette même année mais ne peuvent en aucun cas servir les TMG des exercices futurs.

Le mécanisme de participation aux bénéfices permet dans certains cas à l'assureur de lisser la rémunération des contrats en fonction des aléas commerciaux et des contraintes réglementaires ou bien il peut lui servir de levier commercial sur une courte durée.

Soulignons également que puisque l'assureur investit principalement en actifs obligataires (actifs peu risqués à faible volatilité), le rendement associé aux contrats en euro est intimement lié aux obligations qu'il détient et est par conséquent sensible aux variations des taux obligataires.

Les contrats en Unités de Compte

À l'opposé des contrats en euro, l'assureur ne s'engage pas sur la valeur du capital investi mais sur un nombre de parts appartenant à des fonds autres que le fonds général. Ces parts sont appelées Unités de Compte (UC) et peuvent correspondre à des parts de fonds immobiliers ou mobiliers comme des Sociétés d'Investissement à Capital Variable (SICAV), des Sociétés Civiles Immobilières (SCI) ou encore des Fonds Communs de Placement (FCP). L'avantage de ces contrats est qu'ils permettent d'avoir accès à des placements peu communs et de diversifier son portefeuille d'actifs. Toutefois de par le fait que la garantie de l'assureur ne porte que sur le nombre d'UC et pas sur la valeur des titres impliqués, le risque de marché est reporté sur les assurés. De plus, l'assureur n'est pas tenu de verser une participation aux bénéficiaires sur ces contrats. La rémunération de ce type de contrat fluctue au grès des marchés financiers mais à long terme elle se caractérise par des perspectives de rendements supérieurs aux contrats en euro. Bien que le risque soit plus élevé pour l'assuré, il existe des mécanismes tels que la *garantie plancher* qui permettent de s'assurer que les sommes investies ne diminueront pas au-dessous d'un certain seuil.

Comme nous l'avons vu plus haut, les supports euro bénéficient d'une garantie sur l'épargne engagée. Cette garantie est directement fonction du rendement de l'actif de l'assureur qui nous le rappelons est majoritairement composé d'obligations à plus ou moins long terme (horizon proche de 10 ans la plupart du temps). Le contexte actuel de taux bas limite fortement les perspectives de réalisation de plus-value et menace donc la solvabilité des assureurs. Soulignons qu'il y a encore 5 ans l'obligation du trésor français (OAT) à horizon 10 ans proposait un taux de rendement approchant les 3% alors qu'aujourd'hui il stagne aux alentours de 0,72%. Par ailleurs depuis novembre 2009, la réglementation pousse les assureurs à travers la directive européenne Solvabilité 2 à rediriger leurs assurés et futurs adhérents vers les contrats UC en établissant que « *le niveau des capitaux propres des entreprises d'assurance doit être proportionné au risque des passifs et actifs qu'elles détiennent* ». Le but de cette manœuvre étant d'alléger le risque financier qui pèse sur les compagnies d'assurance ainsi que de solidifier et pérenniser leur activité. En 2015, les épargnants ont versé 24,6 milliards d'euros³ sur les unités de compte ce qui représente un peu plus de 20% des montants investis en assurance vie, le reste étant évidemment placé en fonds euro. Bien que le nombre de souscriptions de contrats UC ait augmenté depuis quelques années, ces chiffres témoignent encore de l'appréhension des épargnants vis-à-vis du risque.

1.2.2 Les contrats multi-supports

Ces contrats ont la particularité de proposer à leurs détenteurs de placer leurs fonds sur différents supports, dans des proportions qu'ils peuvent eux-mêmes déterminer. Ainsi, un assuré peut choisir la combinaison de supports qui conviendra le plus à son profil de risque dans la mesure où ces derniers figurent dans le contrat auquel il a souscrit. Par exemple, s'il a la possibilité d'investir sur le fonds général et deux supports UC que nous nommerons A et B, un assuré averse au risque peut tout à fait

3. Chiffres de la Fédération Française des Sociétés d'Assurances (FFSA).

placer la totalité de son capital sur le fonds euro ce qui nous ramènerait au cas d'un contrat mono-support. En revanche, pour la même configuration de supports, un assuré qui a une appétence pour le risque modérée pourra par exemple investir son capital dans les proportions suivantes : 50% dans le fonds euro, 20% dans le fonds UC (A) et 30% dans le fonds UC (B). Un troisième cas de figure peut se présenter, si ce même assuré a en fait une appétence pour le risque accrue il pourra placer 100% de son capital sur un des deux supports UC.

La promotion des supports en UC n'est pas récente. L'amendement Fourgous voté en juillet 2005 permet aux détenteurs de contrats mono-support de transiter vers du multi-supports tout en conservant l'ancienneté déjà acquise.

Avec les contrats multi-supports apparaît la notion d'*arbitrage entre supports*. Ces termes désignent en fait une option (l'option d'arbitrage) qui permet au détenteur du contrat de modifier les proportions dans lesquelles il a initialement choisi d'investir son capital. Il correspond notamment à un mouvement de fonds amorcé par un changement de comportement de l'assuré qui modifie sa stratégie d'investissement en fonction des informations dont il dispose et de ses besoins. Par exemple, un assuré peut choisir d'arbitrer vers un autre support si le rendement du support sur lequel il a investi ne lui convient pas (facteur endogène) ou encore si sa confiance dans les marchés financiers est ébranlée (facteur exogène). Il n'est pas absurde de penser qu'en ce qui concerne les contrats multi-supports, dans les premiers temps qui succèdent une crise, les assurés opteront plus en faveur de l'arbitrage plutôt que d'exercer leur option de rachat au risque de perdre l'ancienneté qu'ils ont accumulée. L'opération d'arbitrage doit faire l'objet d'une procédure formelle décrite dans le contrat et est soumise à des conditions limitatives (nombre d'arbitrages annuels autorisé, limitation des arbitrages à des situations exceptionnelles, arbitrage automatique ...) qui peuvent différer d'un contrat à l'autre.

Le choix du type de contrat dépend des objectifs de départ que se sont fixés les assurés mais aussi de leurs profils de risque qui peuvent évoluer dans le temps en fonction de leurs projets et des aléas qu'ils rencontrent.

1.3 L'option de rachat

La liquidité inhérente aux produits d'assurance vie participe à sa popularité. En effet, cette caractéristique est un facteur rassurant aux yeux des assurés. L'option de rachat fait partie de cet aspect liquide de l'assurance vie et donne aux assurés la possibilité de retirer à tout moment tout ou partie des sommes versées avant le terme du contrat. L'article L. 132-23 du Code des Assurances reconnaît « le droit au rachat » du souscripteur et précise que la valeur de rachat brute est égale à la provision mathématique associée au contrat à la date du rachat c'est-à-dire qu'elle est équivalente à la valeur des primes capitalisées au jour de la demande de rachat. Bien entendu, une telle opération est soumise à des règles fiscales que nous décrirons par la suite.

Nous distinguons le rachat total et le rachat partiel. Dans le cas d'un rachat total, l'assuré récupère la totalité de l'épargne engagée avant la date d'échéance prévue du contrat ce qui a pour conséquence de mettre un terme à la vie du contrat et de rompre tout lien entre l'assureur et les personnes qui y sont rattachées. Dans le cas d'un rachat partiel, le souscripteur demande à récupérer une partie du capital investi. De ce fait, le contrat existe toujours et continue d'évoluer dans le portefeuille de l'assureur. Nous pouvons tout de suite remarquer que ce deuxième type de rachat soulève une question non négligeable. Alors qu'un rachat total rompt tout lien entre l'assureur et les personnes rattachées au contrat, le rachat partiel continue de générer des coûts pour l'assureur. Cela ne pose aucun problème dans la mesure où la PM restante est suffisamment « rentable » pour couvrir ses coûts. Mais qu'en serait-il si l'assuré décidait de récupérer la quasi-totalité des sommes épargnées ? Nous soulignons ici l'importance de l'existence d'un seuil minimal de PM résiduelle à la suite d'un rachat partiel pour l'assureur.

Une autre remarque en lien avec la section précédente, dans le cas d'un contrat multi-supports il est nécessaire de distinguer rachat partiel et arbitrage. En effet, le mouvement d'une somme d'un fonds à un autre correspond à une opération d'arbitrage et non à une opération de rachat sur le fonds qui a vu sa PM associée diminuer, si le montant net déduit du premier fonds est exactement le même que celui ajouté au fonds d'arrivée.

En 2003, Bacellino fait une analogie à la finance et compare l'option de rachat à une option call américaine qui permet au détenteur de la police d'assurance de récupérer la valeur de la PM courante à tout instant t inférieur à la maturité T du contrat. Cependant cette comparaison reste assez schématique car elle ne permet pas de traduire toute la complexité des produits d'assurance qui nous le rappelons sont souvent dotés d'autres garanties qui peuvent changer la donne.

Outre la possibilité de rachat, le souscripteur peut demander à l'assureur une avance sur les prestations futures. Cette opération peut être assimilée à un prêt que l'assuré devra rembourser et ne modifie pas le fonctionnement du contrat d'assurance. L'assureur ne déduit pas l'avance de l'épargne accumulée. Par conséquent, sa rentabilité reste intacte et elle continue à générer des intérêts comme à son habitude. Notons que les montants prêtés ne peuvent dépasser un certain pourcentage de la provision mathématique (80% du montant du contrat pour les contrats en euros et 60% pour les contrats en Unités de Compte) et sont dans la plupart des cas soumis à un taux d'intérêt dépendant des montants avancés.

1.4 La fiscalité associée au contrat d'assurance vie

Dans la littérature, de nombreux auteurs soulignent l'importance de l'ancienneté fiscale dans le comportement de rachat des assurés. Le régime fiscal qui s'applique effectivement aux contrats peut donc être un paramètre clé dans la décision de rachat. Or la fiscalité se retrouve parfois au cœur des

débats politiques et fait souvent l'objet de remaniements cela afin de satisfaire l'insatiable besoin de fonds des pouvoirs publics.

Selon Gérard Bekerman (2008), président de l'*Association Française d'Épargne et de Retraite* (AFER), l'assurance vie « *n'est pas menacée tant qu'on la laisse tranquille. Mais, elle pourrait le devenir si le gouvernement était tenté, une énième fois, de la réformer* ».

Comme nous le verrons plus bas dans cette section, les règles fiscales actuelles sont moins pénalisantes au fur et à mesure que le contrat gagne en ancienneté dans le portefeuille de l'assureur. Mais avant de décrire le régime qui est en cours, nous nous devons de retracer l'histoire de la fiscalité qui a bien évolué depuis 1980.

1.4.1 Historique

La fiscalité est connue comme étant l'un des atouts majeurs des contrats d'assurance vie et ce depuis leur création. À l'origine, les fruits de la capitalisation des sommes investies étaient exonérés d'impôts, le capital transmis en cas de décès de la tête assurée était exempté de droits de succession et les détenteurs de contrats d'assurance vie bénéficiaient même d'une réduction d'impôts. Cependant, la fiscalité a subi de nombreux changements depuis :

- **1981** : limitation de l'exonération des droits de mutation en cas de décès ;
- **1983** : taxation des plus-values et revenus en cas de retrait avant 6 ans ;
- **1990** : allongement de la durée à 8 ans ;
- **1991** : modification du régime de l'exonération des droits de mutation à 70 ans et 200 000 Francs ;
- **1994** : suppression de la réduction d'impôt ;
- **1996** : soumission à la Contribution à la Réduction de la Dette Sociale (CRDS) sur les revenus ;
- **1997** : soumission à la Contribution Sociale Généralisée (CSG) ;
- **1998** : taxation à 7,5% après 8 ans de détention et plafonnement de l'exonération des droits de succession ;
- **2004-2005** : augmentation des prélèvements sociaux à 11% ;
- **2010** : application des prélèvements sociaux sur les capitaux décès ;
- **2011** : application des prélèvements sociaux sur les multi-supports.

En dépit d'un élargissement toujours croissant du spectre d'application de la fiscalité qui a petit à petit freiné l'effet « avantage fiscal » de l'assurance vie, cette dernière a quand même pu tenir le coup et ne se porte pas aussi mal que ce que l'on aurait pu imaginer. Toutefois on est en droit de se demander comment réagiraient les assurés si le gouvernement décidait de durcir la fiscalité par exemple en créant un prélèvement forfaitaire unique, applicable à toute date de retrait, à un taux de l'ordre de 30% (prélèvements sociaux inclus) pour tous les revenus du capital ?

Cette idée se rapproche de la proposition du Président de la République française actuel M. Emmanuel Macron, à savoir : la mise en place d'un taux de taxation unique « de l'ordre de 30% » sur tous les revenus du capital mobilier (intérêts, dividendes, plus-values sur actions . . .), prélèvements sociaux inclus, qui s'appliquerait seulement aux versements à venir et uniquement pour les personnes ayant placé plus de 150 000 € en assurance vie. Le tout, en laissant le choix du mode de taxation aux détenteurs d'assurance vie c'est-à-dire l'intégration des intérêts au revenu imposable ou le Prélèvement Libératoire Forfaitaire (PLF) qui resterait a priori dégressif. De plus, les prélèvements sociaux seraient réévalués et passeraient de 15,5% à 17,2%. Le sort de l'abattement reste quant à lui encore flou.

Ces éventuels changements ne laissent pas indifférents les épargnants et les compagnies d'assurance très inquiets quant aux répercussions futures de ce projet.

1.4.2 Mode d'imposition

L'adhérent peut choisir le mode d'imposition qui s'appliquera lors d'un rachat partiel ou total. Il existe actuellement deux possibilités pour déclarer ces intérêts en assurance vie :

- a. Les intégrer au barème de l'impôt sur le revenu : c'est la solution qui s'applique par défaut. Les gains sont alors soumis au barème progressif de l'impôt sur le revenu.
- b. Opter pour le Prélèvement Libératoire Forfaitaire : l'adhérent a la possibilité de recourir à ce mode d'imposition au plus tard lors de la demande de rachat. Cette taxation forfaitaire dépend de la durée de détention du contrat et est dégressive en fonction de celle-ci. La taxation suivante s'applique selon l'ancienneté du contrat :
 - 35% entre 0 et 4 ans ;
 - 15% entre 5 à 8 ans ;
 - 7,5% après abattement au-delà de 8 ans sachant que l'abattement annuel est de 4 600 € pour une personne célibataire, veuve ou divorcée et de 9 200 € pour les personnes en couple (mariées ou pacsées).

Il existe des cas d'exonération lors d'un rachat total. Les produits sont exonérés de taxe lorsque l'assuré ou son conjoint, ont été confrontés à l'une des situations suivantes dans l'année qui précède le rachat total : un licenciement, une mise à la retraite anticipée, une invalidité de 2^{ème} et 3^{ème} catégories ou une cessation d'activité non salariée après liquidation judiciaire.

Enfin certains contrats sont exonérés d'impôts sur le revenu dès lors qu'ils dépassent les 8 ans d'ancienneté (exemple : les contrats souscrits avant le 01/01/1983 ou les Plans d'Épargne Populaire).

Dans tous les cas s'ajouteront les prélèvements sociaux qui depuis juillet 2012 sont fixés à 15,5%. Ces derniers se décomposent en :

- CRDS de 0,5%, CSG de 8,2% ;
- un prélèvement social de 5,4% ;
- une contribution additionnelle dite de solidarité et d'autonomie de 0,3% ;
- une part réservée au Revenu de Solidarité Active (RSA) à hauteur de 1,1%.

Pour information, le taux de prélèvement social était de 13,5% depuis le 1^{er} octobre 2011.

1.4.3 Assiette d'imposition selon le type de rachat

L'assurance-vie bénéficie d'une fiscalité privilégiée et même si cela est de moins en moins vrai au fil des réformes, elle reste un des avantages de ce produit d'épargne. La fiscalité peut différer selon : le type de contrat (mono-support ou multi-supports), la durée du contrat, ou encore le dénouement du contrat en cas de vie de l'assuré ou en cas de décès par exemple. Nous ne nous intéresserons qu'au cas des rachats partiels ou totaux dont le mode d'imposition reste immuable quelque soit le type de contrat.

Lors d'un rachat partiel ou total, le montant retiré contient les plus-values antérieurement réalisées. Il faut donc dans un premier temps considérer chacun des versements effectués comme un compartiment indépendant et calculer la plus-value de chacun d'entre eux. Ensuite, il faut multiplier la plus-value de chaque compartiment par le coefficient suivant :

$$C = \frac{\text{Montant du rachat}}{\text{Valorisation actuelle de l'assurance vie}}$$

Dans le cas d'un rachat total, ce coefficient sera égal à 1 et l'imposition portera sur la totalité des plus-values de chacun des compartiments. Autrement dans le cas d'un rachat partiel, il sera compris entre 0 et 1 et il faudra de ce fait déterminer compartiment par compartiment la plus-value réellement imposable selon l'importance du rachat.

Une fois avoir calculé la plus-value réellement imposable pour chaque compartiment, le tableau ci-dessous permet de déterminer les éventuels abattements et taux d'imposition ou prélèvements libératoires à appliquer compartiment par compartiment. Plusieurs dates sont alors à prendre en compte : la date d'ouverture du contrat, la date de réalisation des versements et éventuellement leurs montants.

Date d'ouverture de l'assurance-vie	Date à laquelle a été réalisé le versement	Montant du versement à l'origine	Imposition des plus-values		
			Abattement	Taux d'imposition	Contributions sociales
Jusqu'au 01/01/1983	Sans incidence	Sans incidence	Aucun	Exonération d'impôt sur les intérêts	
Jusqu'au 25/09/1997	Jusqu'au 25/09/1997	< 30 490 €			
	Du 26/09/1997 au 31/12/1997	≥ 30 490 €	Pour les assurances-vie de plus de 8 ans : <ul style="list-style-type: none"> • 4 600 € pour une personne seule • 9 200 € pour un couple marié Abattement annuel (toutes assurances-vie confondues) sur le montant des plus-values imposables si intégration aux revenus (ou en crédit d'impôt si PL).	Intégration des intérêts dans le revenu imposable (rubrique « valeurs et capitaux mobiliers - montant brut des revenus n'ouvrant pas droit à un abattement »). <p style="text-align: center;">Ou</p> Prélèvement libératoire de : <ul style="list-style-type: none"> • 35 % si la durée du contrat est inférieure à 4 ans • 15 % pour un retrait effectué entre la 4^{ème} et la 8^{ème} année • 7,50 % après la 8^{ème} année 	8,2 % au titre de la CSG + 0,5 % au titre de la CRDS + 5,4 % au titre du prélèvement social + 0,3 % au titre du CAPS + 1,1 % pour le financement du RSA
	À partir du 01/01/1998	Sans incidence			
À partir du 26/09/1997	Tous les versements	Sans incidence			

* <http://assurance-vie.lesdossiers.com/fiches-pratiques/fiscalite-assurance-vie>

FIGURE 1.5 – Récapitulatif de l'imposition sur les intérêts

2. Le cadre réglementaire

Maintenant que nous avons posé le décor en revu les caractéristiques principales qui définissent les produits d'assurance vie, il convient d'aborder notre sujet d'un point de vu réglementaire. En effet, la dimension législative qui entoure les rachats ne doit pas être négligée car les directives prudentielles qui sont en vigueur et auxquelles sont soumises toutes les compagnies d'assurance accordent une place toute particulière aux rachats.

2.1 Les normes IFRS

Il existe en comptabilité différentes normes qui répondent chacune aux besoins spécifiques des entreprises et diffèrent selon les pays. Bien que l'établissement de ces normes soit justifié, leur divergence a pour conséquence de freiner les échanges internationaux ainsi que la gestion des groupes transnationaux notamment en terme de consolidation de résultat. Les agents internationaux ont donc ressenti le besoin de mettre en place des normes comptables internationales qui simplifieraient et unifieraient les normes auxquels ils étaient jusque là soumis.

Afin d'instaurer un modèle comptable harmonisé, le bureau des standards comptables internationaux crée en 1973 les normes IAS (International Accounting Standards) qui sont remplacées en 2005 par les normes IFRS (International Financial Reporting Standards). Les normes IFRS sont donc des normes comptables internationales qui permettent de faciliter la communication entre les entreprises et en particulier dans notre cas, les compagnies d'assurance. Les comptes consolidés selon ces normes sont destinés à informer les investisseurs des états financiers des compagnies d'assurance.

La consolidation du bilan doit se faire de manière « honnête ». Schématiquement, les éléments de l'actif sont évalués en valeurs de marché ou en valeurs cohérentes avec le marché alors que les éléments du passif sont eux calculés « au plus juste » ou « fair value ».

L'évolution du marché et la complexité croissante des produits d'assurance font que les normes comptables ne sont pas figées dans le temps. La dernière évolution des normes IFRS c'est-à-dire IFRS 17 impose aux assureurs d'inclure au calcul du passif la Valeur Temps des Options et Garanties ou « Time Value of Options and Guarantees » (TVOG) qui prend évidemment en compte l'option de rachat.

2.2 L'environnement Solvabilité 2

2.2.1 Les directives prudentielles

Le projet Solvabilité 2, mis en place au 1^{er} janvier 2016, vise à harmoniser et à renforcer la réglementation prudentielle du secteur de l'assurance de l'espace économique européen. Les directives Solvabilité 2 pilotées par l'European Insurance and Occupational Pensions Authority (EIOPA) ont pour but de protéger les assurés en encadrant l'activité des organismes d'assurance et en les incitant à détenir un niveau de capital suffisant afin que ces derniers puissent tenir leurs engagements auprès des assurés.

La réglementation Solvabilité 2 a pour principe :

- d'établir un cadre européen sûr et pérenne afin que l'activité d'assurance continue à être un vecteur de croissance et de stabilité économique pour l'Europe ;
- de créer un cadre prudentiel plus adapté aux risques réels pesant sur les compagnies d'assurance ;
- d'inciter les compagnies à connaître et à gérer leurs risques.

La réforme Solvabilité 2, élaborée pour améliorer l'évaluation et le contrôle des risques auxquels sont confrontés les organismes d'assurance, est structurée en 3 piliers :

- **Pilier I** : les exigences quantitatives.
- **Pilier II** : les exigences qualitatives.
- **Pilier III** : les exigences en matière d'informations prudentielles et de publication.

À travers le pilier I, la directive définit des exigences en fonds propres auxquels les compagnies d'assurance doivent se plier afin de pouvoir continuer à exercer leur activité. Afin d'éviter une mise sous tutelle ou l'arrêt de leur activité, les compagnies d'assurances ont l'obligation de constituer une réserve de fonds propres minimale appelée *Minimum Capital Requirement* (MCR). À cette première réserve s'ajoute une marge de fonds propres plus importante, le *Solvency Capital Requirement* (SCR) qui représente le capital économique nécessaire pour que la probabilité de ruine de l'assureur à horizon 1 an soit inférieure à 0,5%. Le pilier I demande aux assureurs d'adopter une vision économique de leur bilan. Nous proposons ci-dessous une représentation du bilan des compagnies d'assurance en vision Solvabilité 2.

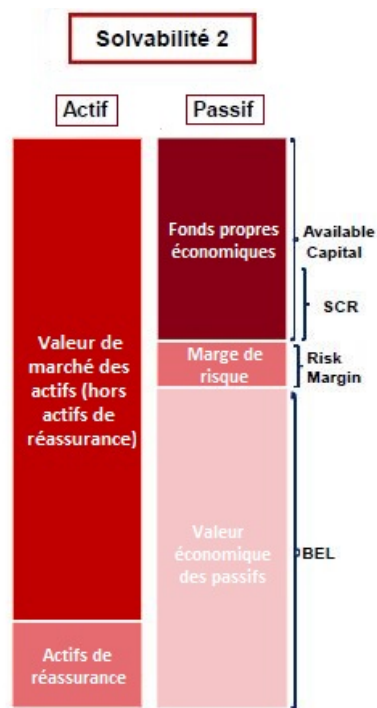


FIGURE 2.1 – Bilan sous Solvabilité 2

Nous nous intéressons plus particulièrement ici au passif de l'assureur. Le Best Estimate of Liabilities (BEL) « correspond à la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent (valeur actuelle attendue des flux de trésorerie futurs), estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinents »⁴. Le BEL est calculé de manière stochastique et correspond à la moyenne des 1000 scénarios économiques. Il comprend notamment l'impact des rachats dynamiques inclus dans la TVOG qui dépend de ces scénarios économiques.

La marge pour risque (ou Risk Margin) représente le coût supplémentaire que devrait payer un autre assureur pour reprendre le passif de la compagnie d'assurance. Il s'agit du montant qui sert à dédommager le repreneur pour avoir à immobiliser du capital sur la durée des engagements. Elle correspond à la projection du SCR sur la durée de projection, permettant de prendre en compte les besoins en capitaux futurs de la compagnie, multiplié par un coefficient de coût d'immobilisation du capital (fixé en général à 6%).

Avant la mise en vigueur de ces directives, la Commission Européenne a bien évidemment lancé une série d'études d'impacts visant à mesurer leurs implications concrètes. Ces études connues sous le nom de Quantitative Impact Studies (QIS) ont été menées par l'EIOPA sur toute la zone euro. La dernière étude en date dénommée QIS5 qui portait sur les provisions techniques, le capital de solvabilité requis (ou SCR) et la classification des fonds propres, avait pour but de tester les exigences quantitatives globales.

4. Article R351-2 du Code des Assurances, transposition en droit français de l'article 77 de la Directive Solvabilité 2, 2015.

2.2.2 Le risque de rachat

La réforme Solvabilité 2 impose aux assureurs de distinguer deux types de rachats :

- Les rachats structurels (RS) : rachats observés en période économique dite « normale ».
- Les rachats conjoncturels ou dynamiques (RD) : rachats « inhabituels » résultant de chocs exogènes.

Cette dissociation est nécessaire car les deux phénomènes sont de natures bien distinctes. Dans le premier cas le niveau de rachats est a priori prévisible car il décrit un comportement « habituel » que l'on peut qualifier de certain alors que dans le second ressort la notion d'aléas. En effet, il existe une probabilité que les assurés rachètent massivement leurs contrats et ce de manière imprévue dans le cas où leur environnement se voit perturbé (exemple : variation des taux obligataires, crise financière, ...). Les raisons qui font que la volatilité du nombre de rachats augmente sont diverses et difficilement identifiables avant que ces rachats dits « exceptionnels » aient été constatés. Cette composante aléatoire inhérente au phénomène de rachat expose donc les compagnies d'assurance à un éventuel risque d'insolvabilité non négligeable qui peut mettre en péril leur activité.

La réglementation Solvabilité 2 impose aux compagnies d'assurance d'identifier et de quantifier les risques auxquels elles sont exposées afin de démontrer leur solvabilité. Ainsi l'EIOPA, à travers le pilier 1 de la directive Solvabilité 2, demande à ces dernières de produire différents indicateurs en particulier le SCR. Cette réserve, qui représente le niveau de fonds propres recommandé, reflète le profil de risque réel des compagnies d'assurance, compte tenu de tous les risques quantifiables, ainsi que l'incidence nette des techniques d'atténuation des risques. Le SCR⁵ se décompose en différents modules et sous-modules de risque dont fait bien évidemment partie le risque de rachat.

2.3 Les rachats dynamiques selon la QIS5

2.3.1 La loi standard

L'étude QIS5 propose une loi de rachats dynamiques « standard » qui a pour but de quantifier le risque de rachat. Elle soutient qu'en ce qui concerne les contrats d'assurance vie épargne-euro, les rachats structurels constatés dans un contexte économique « normal » doivent être additionnés aux rachats conjoncturels.

La modélisation des rachats structurels se fait à partir de lois d'expérience conformes aux données historiques observées par l'assureur ou à défaut basée sur des données de marché. Des variables telles que l'âge des assurés, l'ancienneté fiscale, ou encore l'environnement financier sont suggérées pour la

5. Le calcul du SCR ne sera pas détaillé ici.

modélisation de la loi de rachats structurels. Toutefois lorsque que cela est justifiable, les organismes peuvent considérer que les taux de rachats structurels sont indépendants de ces paramètres et utiliser un taux moyen unique applicable à tous les contrats du groupe homogène de risque.

A contrario, les rachats dynamiques, compte tenu de leur nature, ne peuvent pas être déterminés à partir de lois d'expérience. Il sont couramment modélisés par une fonction dépendant uniquement de l'écart entre le taux servi (TS), c'est-à-dire le taux effectivement observé par les assurés, et un taux dépendant de l'environnement économique souvent appelé taux de rendement espéré par les assurés ou encore taux attendu (TA). Le taux attendu est un taux benchmark qui représente le rendement offert par la concurrence. L'étude propose d'assimiler ce taux attendu au TME (Taux Moyen des Emprunts d'État) qui correspond au taux de rendement sur le marché secondaire des emprunts d'État, fixe supérieur à 7 ans ou bien au taux swap 10 ans. Ces deux taux sont proposés à titres indicatifs mais restent cohérents.

Le modèle de base proposé est de forme sigmoïdale et peut être décrit par la fonction suivante :

$$RD(R) = \begin{cases} RD_{max} & \text{si } R - TA < \alpha \\ RD_{max} \frac{(R - TA - \beta)}{\alpha - \beta} & \text{si } \alpha < R - TA < \beta \\ 0 & \text{si } \beta < R - TA < \gamma \\ RD_{min} \frac{(R - TA - \gamma)}{\delta - \gamma} & \text{si } \gamma < R - TA < \delta \\ RD_{min} & \text{si } R - TA > \delta \end{cases} \quad (2.1)$$

Avec comme paramètres :

- $RD(\cdot)$: le taux de rachats dynamiques que l'on cherche à expliquer.
- R : le taux servi (TS)
- TA : le taux attendu
- RD_{max} : le taux de rachat maximum
- RD_{min} : le taux de rachat minimum
- α : le seuil en-deçà duquel les rachats conjoncturels sont constants et sont fixés à RD_{max} . Dans ce cas ce n'est plus l'écart de taux qui explique le comportement des assurés.
- β et γ sont respectivement les seuils d'indifférence à la baisse et à la hausse du taux servi. Entre ces deux seuils, le comportement de l'assuré n'est pas modifié.
- δ est le seuil au-delà duquel la diminution du taux de rachat conjoncturel est constante et fixée à RD_{min} . Ce n'est plus l'écart de taux qui explique le comportement des assurés.

Notons que l'intégration d'une dimension temporelle au modèle peut s'avérer nécessaire. En effet cette modélisation repose sur une logique simple : sur une même période t , si le taux attendu par les assurés est supérieur au rendement (TS) qu'ils ont perçu alors ils seront plus susceptibles d'arbitrer leurs contrats d'assurance au profit d'autres supports financiers (produits assuranciers, bancaires ou immobiliers) sur la période suivante. Autrement dit les rachats constatés sur la période $t + 1$ seront supérieurs à ceux prévus par la loi structurelle. Si au contraire le taux servi est plus élevé que le taux attendu sur la période t , alors il y aura moins de rachats que prévus sur la période qui suit car les assurés s'attendent ce que la compagnie leur serve un taux de rendement relativement proche de celui qui leur a été servi sur la période t et qui restera plus avantageux que celui offert par la concurrence.

Adrien Suru (2012)^[2] s'intéresse à la flexibilité du comportement des assurés face aux variations du spread (ou écart) entre le taux attendu et le taux servi. Il étudie ce phénomène à travers un concept emprunté à la physique : l'élasticité des matériaux. Son étude se concentre notamment sur la capacité des assurés à supporter de plus ou moins grands écarts en prenant comme variable test le TMG, le but étant de cibler l'étendu à partir de laquelle les assurés renonceront à garder leurs contrats c'est-à-dire le moment où il considéreront que le taux de revalorisation ne leur est plus favorable.

2.3.2 Les lois ONC

Les Orientations Nationales Complémentaires (ONC)^[3] du QIS5 ne proposent pas une mais deux lois de rachats dynamiques que nous nommerons par la suite QIS_{Min} et QIS_{Max} . La première correspond à un plafond minimum de rachats et la deuxième à un plafond maximum de rachats. Ces deux lois forment un « tunnel » qui borne les lois calibrées par les compagnies d'assurance.

Nous pouvons remarquer que le paramètre RD_{min} est négatif. Cela indique qu'il est possible qu'en plus de faire augmenter les rachats structurels, les rachats dynamiques peuvent dans certaines conditions les faire diminuer. On parlera alors de loi de rachats dynamiques bidirectionnelle. Notons cependant que le fait de prendre en compte une éventuelle diminution du taux de rachats structurels n'est pas prudent pour l'assureur. De plus, ces modélisations sont proposées à titre indicatif. Il n'y a pas d'obligation formelle qui pousse les compagnies d'assurance à les utiliser. En outre, ces lois calculées à partir d'un échantillon de compagnies d'assurance représentent un comportement moyen des assurés dans une période économique distincte. Elles n'expliquent donc pas de manière spécifique le comportement des portefeuilles de chaque compagnie et peuvent par conséquent sous-estimer ou surestimer de manière non négligeable les taux de rachats dynamiques.

Le taux de rachat total (noté RG) que nous qualifierons plutôt de « global » pour éviter toute confusion par la suite, s'écrit comme la somme du taux de rachats structurels et du taux de rachats dynamiques. Plus précisément, il est défini dans le cadre de l'étude QIS5 par :

$$RG(R, TA) = \text{Min}(1, \text{Max}(0, RD + RS))$$

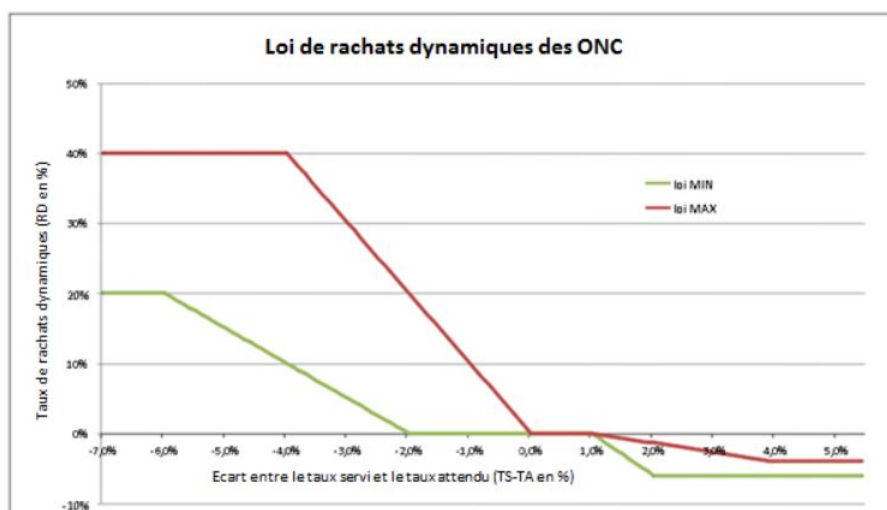


FIGURE 2.2 – Représentation de la loi QIS

	α	β	γ	δ	RDmin	RDmax
QISMax	-4%	0%	1%	4%	-4%	40%
QISMin	-6%	-2%	1%	2%	-6%	20%

FIGURE 2.3 – Paramètres des lois QIS_{Max} et QIS_{Min}

2.3.3 Importance de la considération des rachats dynamiques

Une étude d'impacts réalisée en 2013 par l'ACPR^[4] en vue de préparer la mise en application des directives prudentielles Solvabilité 2 montre l'effet de la prise en compte des rachats dynamiques dans le calcul du Best Estimate (BE) et du SCR. L'étude est réalisée auprès de 20 organismes qui ont renseigné les six paramètres cités plus haut pour la modélisation de leurs lois de rachats conjoncturels, les montants de BE correspondant à celles-ci, les montants correspondants aux lois QISmin et QISmax, ainsi que les montants de BE sans prise en compte des rachats conjoncturels. Le tableau ci-dessous résume les impacts calculés :

	Ecart relatif moyen par rapport au BE sans rachats conjoncturels	Ecart relatif moyen par rapport au SCR net sans rachats conjoncturels
Plafond min des ONC	+0.43%	+13.5%
Loi utilisée par l'organisme	+0.61%	+18.4%
Plafond max des ONC	+1.33%	+41.3%

FIGURE 2.4 – Impacts BEL de l'exercice de préparation ACPR 2013

Ces chiffres montrent bien l'importance de l'hypothèse de rachats conjoncturels. La prise en compte de ce type de rachats a un impact significatif sur le BEL et l'augmente dans la plupart des cas. En d'autres termes elle a pour conséquence d'augmenter les engagements de l'assureur envers ses assurés qui doit de ce fait accroître les réserves qu'ils s'est constituées afin d'être en mesure de respecter ses engagements à tout moment. Nous comprenons en partie ici les enjeux de la modélisation d'une loi de rachats dynamiques propre à l'activité de l'assureur.

2.3.4 La question de la gouvernance

Nous avons vu dans les paragraphes précédents que les compagnies d'assurance étaient tenues, pour de nombreuses raisons notamment réglementaires, financières mais aussi d'un point de vue pérennité de leur activité, de prendre en compte les rachats dynamiques dans l'évaluation de leur passif. La réglementation en vigueur aide à leur implémentation en mettant à disposition un modèle classique utilisable par toutes les compagnies d'assurance qui sont amenées à recalibrer la loi de rachats dynamiques proposée afin que celle-ci soit plus adaptée à leur données.

Cependant, les compagnies ont toujours la possibilité de construire leurs propres lois de rachats conjoncturels dans la mesure où ils arrivent à démontrer que leurs lois donnent une meilleure représentation du comportement de leurs assurés que la loi standard. Toute la difficulté réside dans leur capacité à prouver et à justifier l'utilisation de ces lois. C'est l'ACPR qui est en charge de valider l'utilisation de telles lois et qui par conséquent est en mesure de demander aux assureurs d'effectuer plusieurs études d'impacts pour les justifier. Nous pouvons relever ici que dans le cas où une compagnie décide de créer sa propre loi, tout effet des rachats dynamiques sera difficilement comparable au marché. En effet, les lois spécifiques aux portefeuilles des assureurs peuvent différer de la loi standard en terme de structure et de paramètres pris en compte. Or, dans le cas où une étude nationale est réalisée, les compagnies doivent se plier au mieux aux hypothèses fournies, hypothèses qui supposent en générale que c'est la loi standard qui est appliquée.

Bien que l'implémentation d'une loi spécifique puisse s'avérer moins pénalisante pour l'assureur en terme de provisions, elle a aussi le désavantage d'induire un effort opérationnel supplémentaire de la part des compagnies. L'assureur doit donc de son côté juger si la valeur ajoutée qu'apporterait une loi de rachats dynamiques spécifique à son activité ne serait pas absorbée par le coût de sa mise en œuvre.

3. Problématique

Depuis les années 2000 les rachats dynamiques ont fait l'objet de nombreuses recherches. La plupart d'entre elles proposent de modéliser les rachats dynamiques en considérant les rachats globaux. Or, nous avons vu que les rachats globaux devaient correspondre à la somme des rachats structurels et dynamiques. De fait, une modélisation directe des rachats dynamiques sur l'ensemble des rachats globaux revient à comptabiliser doublement les rachats structurels.

D'autre part comme nous l'avons vu, la modélisation des rachats dynamiques est un enjeu majeur pour les compagnies d'assurance. Les comportements des assurés étant difficilement prévisibles nous comprenons que la loi de rachats dynamiques doit faire l'objet, dans l'idéal, d'une réévaluation annuelle. En 2012, une demande de back-testing de la loi standard calibrée par Generali provenant de l'ACPR montre que la loi QIS utilisée ne se déclenche quasiment jamais. Cela implique que la loi de l'époque n'était pas adaptée aux comportements de rachats « exceptionnels » observés dans le portefeuille de l'entreprise. Nous remettons ici en question l'utilisation de la loi proposée dans le QIS5.

Nous cherchons dans ce mémoire à expliquer les comportements de rachats « exceptionnels » en ayant pour objectif final, la construction d'une ou plusieurs loi(s) de rachats dynamiques. L'historique de Generali montre des taux de rachats élevés sur les périodes de crises. Nous tenterons à travers notre étude de montrer le lien qui existe entre rachats dynamiques et les périodes d'instabilité économique.

La première question essentielle que nous nous posons est le problème de la dissociation des rachats structurels et des rachats dynamiques. Le deuxième problème auquel nous devons faire face, est de trouver et de choisir les variables exogènes qui permettront de modéliser ces rachats. Nous resterons ouverts sur la nature des variables utilisées pour expliquer ce phénomène. Nous devons ensuite trouver une loi de rachats dynamiques utilisant les variables sélectionnées qui soit plus en adéquation avec les rachats observés. Enfin, nous finaliserons notre étude en évaluant l'impact de notre loi de rachats dynamiques sur le passif de la compagnie.

Partie II : Étude préalable et dissociation des rachats

4. Le risque de rachat chez Generali : la vision du modèle interne

Nous évoquons ici la manière dont sont évalués les rachats dans le modèle de Generali. Nous proposons ensuite quelques pistes ayant pour but de nous guider dans la recherche de variables expliquant le phénomène de rachats conjoncturels.

4.1 Les lois de rachats structurels

La modélisation des rachats structurels mobilise à la fois l'historique des taux de rachats observés par l'entreprise et les données individuelles relatives aux contrats des assurés. Afin que les rachats structurels reflètent au mieux la réalité, plusieurs lois de rachats ont été construites. Les diverses caractéristiques et composantes du portefeuille Épargne (réseau de distribution, support, ...) ainsi que les différentes formes de rachats (partiels ou totaux) justifient la nécessité de représenter ce type de rachats à travers différentes lois.

Bien que ces lois ne soient pas les mêmes, elles sont toutes construites suivant la même méthodologie. Après avoir segmenté l'historique de manière cohérente, les rachats mensuels sont corrigés des rachats dynamiques en s'appuyant sur un jugement d'expert. Les taux de rachats constatés sur des périodes considérées comme étant des périodes de crise sont lissés à l'aide de moyennes calculées sur les périodes économiques dites « normales ».

Les rachats historiques corrigés de l'effet des rachats dynamiques servent alors de base pour la construction des lois de rachats structurels. Ces derniers sont calculés en fonction de l'ancienneté des contrats. La logique, étant que les taux de rachats structurels associés à une ancienneté N expliquent les comportements de rachats structurels des assurés dont les contrats sont vieux de N années.

Les rachats structurels sont pris en compte lors du calcul des flux liés aux composantes déterministes du passif.

4.2 La loi de rachats dynamiques

Jusqu'en 2012, Generali utilisait la loi de rachats conjoncturels standard recalibrée pour modéliser l'aléa lié au comportement de rachat des assurés. Cependant cette loi ne semblait pas correspondre aux portefeuille de contrats de l'entreprise. Dans la mesure où l'écart entre le taux servi et le taux attendu

présentait une faible corrélation avec les rachats dynamiques observés, la loi recalibrée a entraîné une sous-estimation des rachats dynamiques qui ont suivi la crise de la dette souveraine.

Suite à ce constat, les rachats dynamiques ont fait l'objet d'une étude en interne ayant pour but de déterminer une loi qui soit spécifique à l'activité de l'entreprise. Dans le modèle ALM de la compagnie, les taux de rachats sont mesurés en nombre de contrats. L'étude a montré une corrélation des rachats dynamiques avec l'indice EUROSTOXX 50 et le spread entre le taux 10 ans BBB et le taux sans risque à maturité 10 ans. C'est donc à partir de ces variables que la loi actuellement utilisée dans le modèle de projection stochastique a été construite.

En théorie, la valeur des rachats dynamiques s'obtient en effectuant la différence suivante :



FIGURE 4.1 – Valeur des rachats dynamiques

5. La base de données

Dans cette section nous présentons la base données sur laquelle nous nous sommes appuyés pour construire notre loi de rachats dynamiques. Cette base est également utilisée pour la construction des lois de rachats historiques pour la branche Épargne et en particulier la modélisation des rachats structurels.

5.1 Collecte des données

Les données relatives aux polices des assurés sont récoltées mensuellement⁶ via des Applications de Gestion Internes (AGI) puis sont centralisées via un collecteur qui se charge de les uniformiser. La cohérence des données par rapport au modèle physique et fonctionnel du collecteur est contrôlée lors du processus de centralisation garantissant ainsi l'intégrité et l'exhaustivité des données fournies. Les AGI, alimentées par des outils de saisie, sont en général spécifiques à un périmètre d'activité particulier (exemple : épargne, retraite, prévoyance, ...).

Nous restreignons notre étude aux contrats d'épargne et disposons d'un historique d'une étendue de 9 ans qui correspond plus précisément à la période du 1^{er} janvier 2007 au 31 décembre 2015.

La base de données comporte des données individuelles agrégées suivant 3 mailles d'agrégation :

- le mois et l'année de provision mathématique ;
- le support (EURO ou UC) ;
- l'ancienneté en année.

L'ancienneté du contrat correspond à la durée écoulée depuis la date d'effet fiscal du contrat, c'est-à-dire la date à laquelle la durée fiscale du contrat commence à être mesurée. Nous avons accès aux informations suivantes sur la période d'observation indiquée :

- le niveau de provision mathématique ;
- le nombre de contrats en cours ;
- le nombre de rachats totaux (ou contrats rachetés) ;
- le montant des rachats partiels et totaux.

6. Les données sont collectées à la fin de chaque mois.

5.2 Calcul des taux de rachat

Nous détaillons dans cette section le calcul du taux de rachat. Il existe plusieurs façons de mesurer un taux de rachat. Le calcul du taux de rachat peut être abordé suivant deux grandes approches. La première consiste à évaluer le taux de rachat en montant de provision mathématique, la deuxième quant à-elle repose sur un calcul en nombre de contrats. En effet, le rachat total d'un contrat entraîne par définition une baisse du nombre de polices et par conséquent une diminution de la provision mathématique strictement égale à la valeur du contrat qui est sorti du portefeuille de l'assureur. Par opposition au rachat total, le rachat partiel implique une réduction de la provision mathématique proportionnelle à la valeur associée au contrat sans excéder sa valeur totale. Le taux de rachat total peut donc être calculé en montant et en nombre alors que le taux de rachat partiel doit être évalué en montant uniquement. Notons qu'il peut être intéressant de mesurer le taux de rachat total en montant pour pouvoir le comparer au taux de rachat partiel.

La méthode utilisée pour calculer le taux de rachat dépend de la nature du rachat (partiel ou total) et de l'usage final de ce dernier. Ainsi le taux de rachat peut être déterminé selon un niveau de granularité cohérent avec l'étude menée. Par exemple, nous pouvons calculer un taux de rachat par ancienneté (comme nous avons pu le voir paragraphe 4), par univers clients ou encore par produit.

Afin de pouvoir calculer les taux de rachat, nous devons ajouter à notre base de données deux informations essentielles : le niveau de la provision mathématique et le nombre de contrats dans le portefeuille en début de mois. Il suffit pour cela de sommer les montants de PM (respectivement nombres de contrats) rachetés avec les montants de PM (respectivement nombres de contrats) constatés à la fin du mois. La méthode de calcul est la même selon la forme de rachats (partiels ou totaux) et selon la quantité mesurée (en montant ou en nombre). Pour les contrats multi-supports il est nécessaire de faire la distinction Euro/UC. Cette distinction se fait suivant les proportions de PM placées sur l'euro et sur l'UC. À titre d'exemple, si un contrat multi-supports est composé de 80% de PM placés sur un fonds euro et 20% de PM placés sur un fonds UC, alors le contrat sera modélisé en 0,80 contrat Euro et 0,20 contrat UC. Cette méthode permet d'obtenir deux taux distincts Euro et UC, ce qui donne un résultat en terme de montant de rachat beaucoup plus proche de la réalité. Nous décidons de faire notre étude uniquement sur les rachats totaux afin que l'évolution du nombre de contrats dans le temps et la projection des frais liés aux contrats (coût unitaire par contrat) reflètent au mieux la réalité lorsque que nous implémenterons notre loi de rachat. De plus, nous n'étudierons que les taux de rachats totaux en nombre. Ce mode de calcul nous est imposé par le modèle de projection des flux utilisé dans l'entreprise. La formule ci-dessous nous permet de calculer les taux de rachat que ce soit en montant ou en nombre pour le mois i :

$$\text{Taux de rachat } (i) = \frac{\text{nombre de contrats rachetés } (i)}{\text{nombre de contrats de fin de mois } (i) + \text{nombre de contrats rachetés } (i)}$$

Nous avons décidé de calculer les taux de rachat par mois afin de nous assurer que les données soient suffisamment exhaustives pour pouvoir effectuer nos analyses. En effet, la période que nous étudions ne s'étend que sur 9 ans ce qui signifie que dans le cas où nous aurions fait une étude annuelle, nous n'aurions eu que 9 taux de rachat, ce qui est clairement insuffisant. Cependant, le modèle de projection stochastique de Generali fonctionne par pas annuel. Nous devons donc par la suite annualiser les taux de rachat mensuels afin de pouvoir implémenter notre propre loi de rachats dynamiques et de pouvoir comparer ses effets avec ceux induits par la loi actuelle de l'entreprise. Pour cela, nous utiliserons la formule suivante pour chaque mois i :

$$(\text{Taux de rachat annualisé})_i = (1 + (\text{Taux de rachat mensuel})_i)^{12} - 1$$

Remarque : le taux de rachat global sur l'année j s'obtient à partir des taux de rachat mensuels constatés sur cette même année. Nous l'évaluons grâce à la formule suivante :

$$(\text{Taux de rachat global})_j = (1 - \prod_{i=1}^{12} (1 - \text{Taux de rachat du mois } i \text{ de l'année } j))$$

6. Analyses qualitatives et quantitatives

6.1 Les taux de rachat historiques

L'ACPR qui veille à la bonne application des directives Solvabilité 2, pousse les assureurs à être plus vigilants par rapport à l'évolution des rachats et au risque lié à ces derniers. Le graphique ci-dessous montre à quel point les rachats historiquement constatés sur le portefeuille Épargne de l'entreprise peuvent être volatiles.

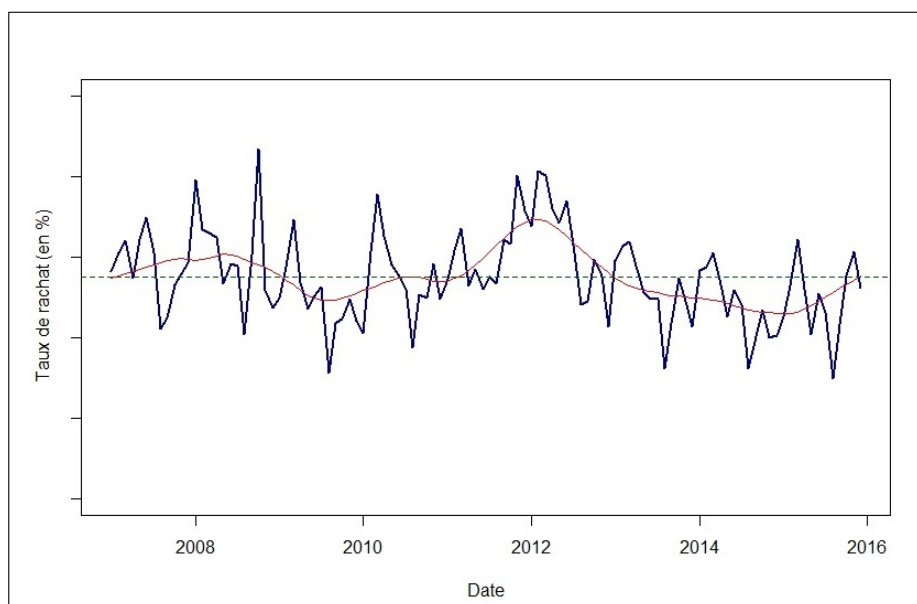


FIGURE 6.1 – Rachats observés sur le portefeuille Épargne

Toutefois ces derniers semblent fluctuer autour de leur moyenne historique représentée par la ligne pointillée verte. Nous pouvons constater que les taux de rachat semblent présenter une saisonnalité annuelle sans montrer de tendance particulière. Nous observons plutôt des changements de niveaux (exemple en 2012-2013) qui témoignent qu'une perturbation soudaine de l'environnement des assurés et de leurs comportements. Nous remarquons également que le motif périodique, caractéristique d'un phénomène saisonnier, a l'air de se déformer de manière plus ou moins brutale sur les périodes de crise. En effet, la période de 2008 à 2012 s'est vue ponctuée par de nombreuses crises économiques. Nous constatons que sur cette fenêtre temporelle les taux de rachat sont plus erratiques ce qui a pour effet de distordre le motif périodique, alors que sur des périodes économiques dites « normales », prenons par exemple les années 2013 à 2015, le motif est beaucoup plus discernable. La présence d'une saisonnalité peut s'expliquer par un besoin de liquidité de la part des assurés à certaines périodes de

l'année. Ainsi des phénomènes récurrents qui affectent l'ensemble des assurés tels que les paiements des impôts, les rentrées scolaires, les fêtes de fin d'année ou encore les périodes de vacances peuvent influencer leurs comportements de rachat.

L'absence de tendance à la hausse ou à la baisse est caractéristique d'un portefeuille « vieux », c'est-à-dire assez ancien pour que toutes les anciennetés fiscales (en général entre 0 et 25 ans)⁷ soient représentées à chaque pas temporel.

Dans son mémoire Adrien Suru^[2] analyse différents produits suivant leur ancienneté. Il distingue les vieux produits, dont les rachats sont stables et présentent une saisonnalité et les produits plus récents qui témoignent d'un comportement de rachat instable fortement dépendant de l'ancienneté fiscale des assurés. Il explique la stabilité temporelle constatée par le fait que le principal facteur influant le taux de rachat, c'est-à-dire l'ancienneté fiscale, est neutralisé par la diversification. La transposition de son étude de cas à notre portefeuille, nous conduit à supposer que les rachats que nous observons sont exempts de tout éventuel « effet ancienneté fiscale ».

6.2 L'ancienneté fiscale

Dans la littérature de nombreuses études sur données individuelles utilisent les caractéristiques des contrats et des assurés pour expliquer le comportement de rachat. La plupart de ces études posent l'ancienneté fiscale comme principal facteur explicatif des taux de rachat. Ainsi, l'étude d'un portefeuille de contrats d'assurance vie espagnol avec présence de mécanisme d'incitation fiscale, conduite par Mihaud et al. (2011), montre l'importance du pic de rachat qui suit la fin de l'incitation fiscale. Les travaux d'Eling et Kiesenbauer (2011) sur un portefeuille allemand relatif à sept types de contrats distinguent un pic de rachats à l'issue de la première année d'ancienneté qui se succède par une baisse progressive des rachats lorsque l'ancienneté augmente.

7. Au-delà de 25 ans les données se font rares et ne peuvent par conséquent pas être représentatives des générations.

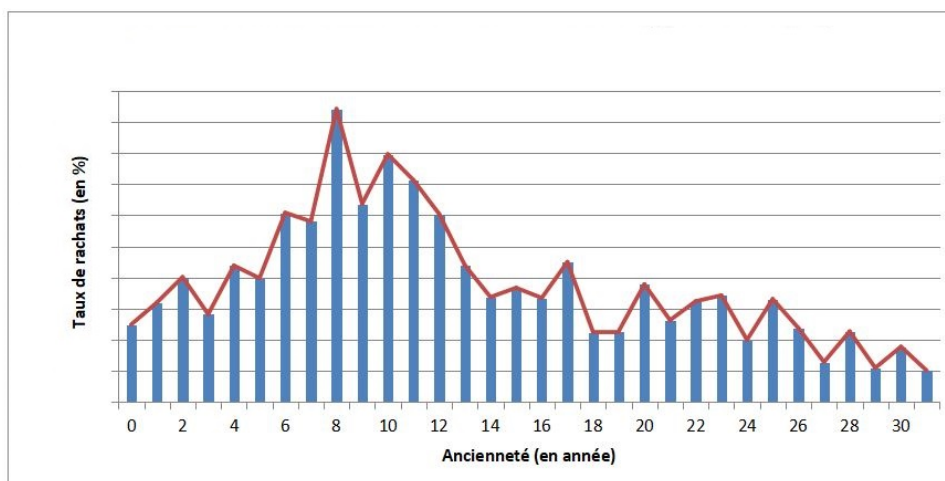


FIGURE 6.2 – Rachats observés par ancienneté

Nous observons à présent les taux de rachat par ancienneté fiscale. Le graphique ci-dessus présente 5 principaux pics de rachats situés à 2, 4, 6 et 8 ans suivis d'une diminution progressive des taux de rachat au-delà de 10 ans d'ancienneté.

Les rachats entre 0 et 2 ans peuvent en partie s'expliquer par le fait que les assurés se rendent compte que le produit auquel ils ont souscrit ne soit pas adapté à leurs besoins. Les pics observés à 4, 6 et 8 ans peuvent être liés aux changements de fiscalité : prélèvement libératoire de 35% si la durée du contrat est inférieure à 4 ans, 15% si le rachat est effectué entre la 4^{ème} et la 8^{ème} année et 7,5% à partir de la 8^{ème} année (cf. tableau sur la fiscalité section 1.4.3). Nous rejoignons ici les conclusions des travaux cités précédemment.

7. Étude des périodes de crise

Avant toute tentative de modélisation, nous avons besoin de repérer les périodes de crise afin de vérifier que les rachats conjoncturels que nous avons déterminés sont cohérents avec le contexte économique et dans la mesure du possible de relier les hauts niveaux de rachats à des chocs économiques distincts.

7.1 Historique des crises

Les marchés financiers ont été particulièrement instables sur la période de janvier 2007 à mars 2012 puis se sont stabilisés par la suite. Après une étude minutieuse des chocs économiques qui ont jonché cette période et en s'appuyant sur les travaux de Xavier Brugirard^[5] nous avons repéré les événements suivants :

- **Juillet 2007 à fin août 2007** : début de la crise des subprimes suite à l'éclatement de la bulle immobilière aux États-Unis.
- **Janvier 2008 à fin mars 2008** : affaire Kerviel.
- **Août 2008 à fin avril 2009** : apogée de la crise financière qui sévit depuis 5 ans et dépôt de bilan de Lehman Brothers en septembre 2008 suivi de l'affaire Madoff en décembre 2008.
- **Avril 2010 à septembre 2010** : crise de la zone euro : instabilité de la zone euro liée à la capacité de la Grèce à honorer ses dettes.
- **Août 2011 à fin 2012** : crise de la dette souveraine.
- **Année 2012** : répercussions présumées de l'avenant commercial de fin 2011 de Generali visant à supprimer les TMG.

7.2 Outil statistique de base : le boxplot

Le boxplot (ou boîte à moustaches) est une méthode statistique qui permet de résumer l'information fournie par l'étendue, ainsi que par les trois quartiles et les intervalles qui les séparent. Nous nous intéressons ici à la longueur des moustaches et aux éventuelles valeurs extrêmes. La longueur des moustaches renseigne sur la dispersion des valeurs situées au début ou à la fin de la série ordonnée. De manière générale, une boîte à moustaches est d'autant plus étendue que la dispersion des données est grande. Lorsque la série observée contient une valeur extrême (très petite ou très grande), les moustaches ont tendance à devenir très longues. Notons qu'une valeur extrême ou aberrante sera

généralement une valeur extérieure à la boîte à moustaches, cependant toute valeur extérieure n'est pas nécessairement une valeur extrême ou aberrante.

Nous utilisons la méthode des boîtes à moustaches pour repérer d'une part les taux de rachat qui s'écartent largement de la moyenne (valeurs externes) et d'autre part les périodes de grande volatilité des taux de rachat (moustaches longues). Nous supposons que lorsqu'un choc exogène survient, le niveau des taux de rachat s'en voit affecté et varie brusquement donnant naissance à un taux de rachat plus ou moins élevé par rapport aux autres. De plus, en nous appuyant sur l'analyse que nous avons effectuée dans la section 6.1, nous supposons que dans les temps qui suivent le choc, la dispersion des taux de rachat est grande. Les données sont segmentées selon la saisonnalité, c'est-à-dire par an.

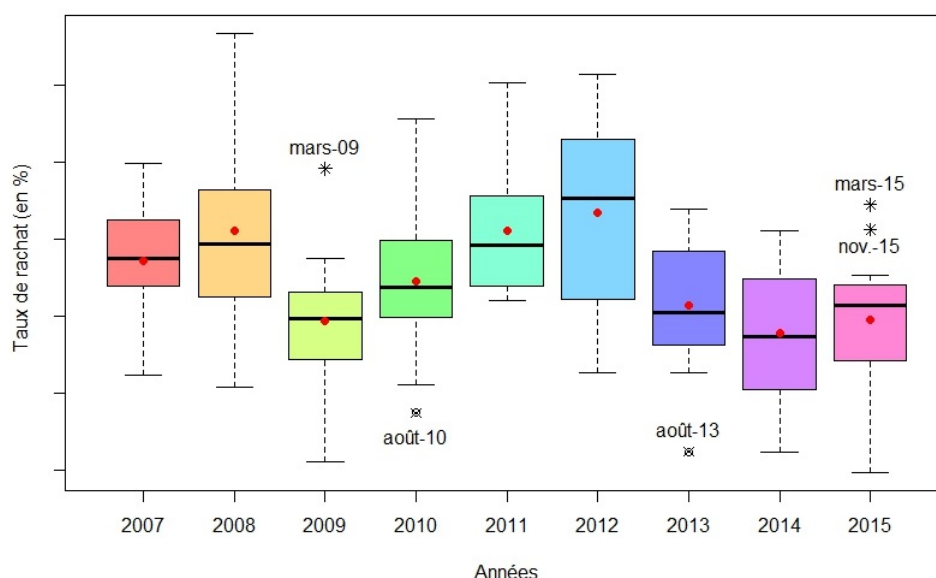


FIGURE 7.1 – Boîtes à moustaches des taux de rachat sur la période 2007-2015

La première chose que nous remarquons est la présence de valeurs extérieures aux boîtes à moustaches. Les points rouges représentent les moyennes annuelles des taux de rachat et les barres noires à l'intérieur des boxplots correspondent aux médianes. Les boxplots montrent des taux de rachat plutôt élevés par rapport aux autres années pour les années 2007, 2008, 2010, 2011 et 2012. La valeur externe haute correspondant à mars 2009 couplée à une moyenne basse des taux de rachat sur cette année témoignent d'une instabilité des taux de rachat à cette date. Notons que l'année 2015 présente aussi quelques turbulences notamment en novembre et en mars.

La boîte à moustaches est un outil simple et facilement utilisable opérationnellement. Elle permet d'avoir une idée sur la dispersion des données et l'éventuelle présence de valeurs extrêmes. La méthode comporte toutefois certains inconvénients :

- elle ne permet pas de distinguer valeurs aberrantes et valeurs extrêmes ;

- elle impose de choisir une segmentation temporelle lorsqu'on traite des données chronologiques (il faudrait faire une analyse « glissante » des données pour observer le phénomène dans son ensemble, une telle analyse pourrait très vite être fastidieuse).

7.3 Rapprochement avec la théorie des valeurs extrêmes

Toujours dans l'optique de repérer des valeurs inhabituelles de taux de rachat, nous détournons ici une méthode largement employée en théorie des valeurs extrêmes^[8] : le *Mean Excess Plot* (MEP).

La théorie des valeurs extrêmes ne s'intéresse non pas au comportement en moyenne des données, mais plutôt à celui des événements à valeurs beaucoup plus fortes (ou faibles) que celles observées autour de la moyenne, dénommées valeurs extrêmes. Ainsi cette théorie permet de quantifier la probabilité d'occurrence d'événements rares tels que des catastrophes naturelles ou encore des crises financières qui peuvent avoir des répercussions dramatiques pour l'activité humaine.

Logiquement, si la stabilité financière d'un État est menacée alors les taux de rachat auront tendance à être beaucoup plus élevés qu'en période économique stable. C'est afin de contrer ce phénomène de rachats abusifs et de préserver le système financier que les députés du parlement ont voté le 8 novembre 2008 en faveur de la possibilité de bloquer les rachats sur les contrats d'assurance vie en cas de menace sur la stabilité financière du pays, à travers le projet de loi Sapin 2^[10]. Nous voyons ici l'intérêt de l'utilisation de la théorie des valeurs extrêmes dans le cadre du repérage de crises financières.

7.3.1 Théorie : le Mean Excess Plot

Soient n variables aléatoires observées (X_1, \dots, X_n) . Le Mean Excess Plot appelé aussi le *Mean Residual life Plot* est le graphe des points $(u, e(u))$ où $e(u)$ est la moyenne des excès (Y_1, \dots, Y_{N_u}) au-delà du seuil u . C'est un outil spécifique servant à déterminer un seuil performant. De plus, nous approchons la loi des excès par une loi de Pareto Généralisée $GPD_{\xi, \sigma}$ (Generalized Pareto Distribution).

La moyenne des excès est définie par :

$$e(u) = \mathbb{E}(Y|X > u)$$

Elle correspond à une fonction de u qui s'exprime à l'aide de la fonction de survie $(1 - F(\cdot))$, où $F(\cdot)$ représente la fonction de répartition associée aux observations x_i . Nous supposons que pour ce modèle, $\mathbb{E}(X) < \infty$.

En pratique, la fonction des moyennes des excès e est estimée par \hat{e}_n en :

$$\hat{e}_n(u) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i I_{(u, \infty)}(x_i)}{\sum_{i=1}^n I_{(u, \infty)}(x_i)} - u$$

Telle que $I_{(u, \infty)}$ soit égale à 1 si $x_i > u$ et 0 sinon, et nous choisissons la $(k+1)$ -me grande observation : $u = x_{n-k,n}$ comme seuil, d'où l'estimation :

$$\hat{e}_n(x_{n-k,n}) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k x_{n-j+1,n} - x_{n-k,n}$$

Proposition :

- Si (Y_1, \dots, Y_{N_u}) suivent une loi $GPD_{\xi, \sigma}$ alors pour $\xi < 1$:

$$\mathbb{E}(Y|X > u) = \frac{\xi}{1-\xi}u + \frac{\sigma}{1-\xi}$$

Dans ce cas, le seuil à retenir u , est celui pour lequel la moyenne des excès est approximativement linéaire.

- Plus les queues de la distribution sont épaisses, plus la fonction $e(u)$ tend rapidement vers l'infini.

En effet, la fonction moyenne des excès relative à une distribution de loi Pareto de paramètre $\alpha > 0$, appartenant au domaine d'attraction de Fréchet d'indice des valeurs extrême $\xi = \frac{1}{\alpha}$, s'écrit comme suit : $e(u) = \frac{k+u}{\alpha-1}$.

Alors que pour une distribution de queue moins épaisse, par exemple la distribution Weibull de paramètres $\lambda > 0$ et $\tau > 0$, appartenant au domaine d'attraction de Gumbel, la fonction moyenne des excès relatif à cette loi s'écrit comme suit : $e(u) = \frac{u^{1-\tau}}{\lambda \cdot \tau}$

7.3.2 Application

En appliquant la méthode du MEP aux taux de rachat, nous obtenons les résultats suivants :

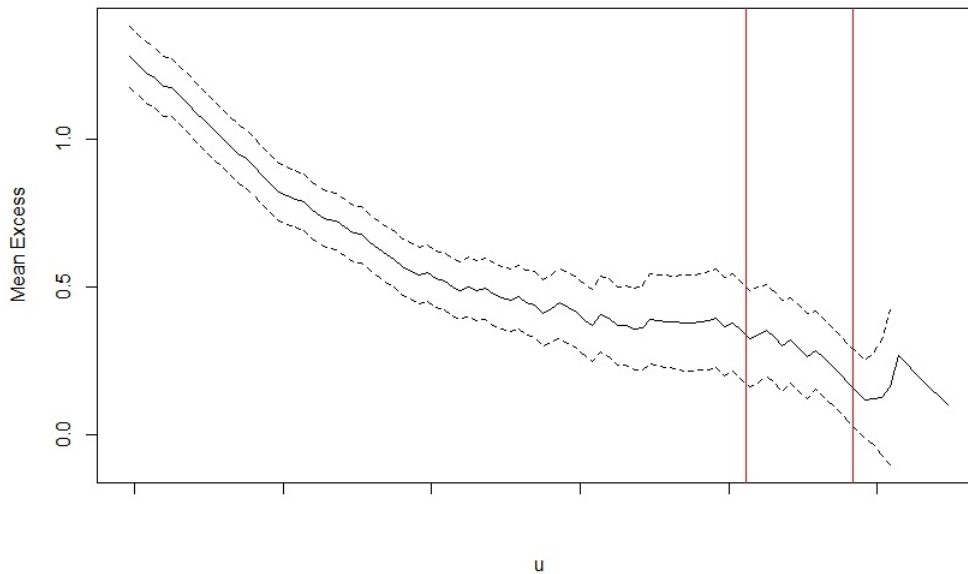


FIGURE 7.2 – Mean Excess Plot : détermination du seuil

Nous estimons que la partie bornée par les droites verticales rouges est linéaire. Le seuil u_1 est fixé dans cet intervalle. Nous avons choisi de garder la première valeur de cette intervalle comme seuil. La première difficulté ici réside dans le fait de déterminer le moment où la moyenne des excès en fonction du seuil u est assimilable à une fonction linéaire. Il faut ensuite fixer un seuil qui ne soit ni trop grand (risque de considérer une valeur extrême comme valeur non extrême) ni trop petit (risque inverse au précédent). Il est d'usage de prendre comme seuil u la plus petite valeur à partir de laquelle le MEP est linéaire.

Remarque : Nous pouvons également remarquer que la pente du MEP est négative. Cela est une caractéristique des cas bornés (ici par 1 car nous parlons de taux de rachat).

7.3.3 Résultats

Après avoir déterminé le seuil, nous traçons ce dernier sur notre historique de rachats.

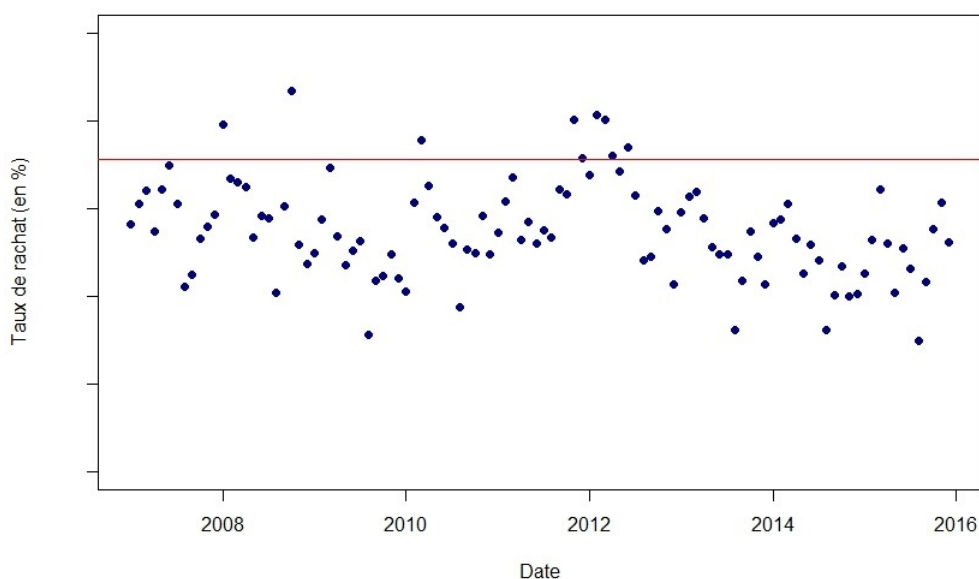


FIGURE 7.3 – Repérage des hauts niveaux de taux de rachat avec le MEP

Le seuil retenu est représenté sur le graphique par la droite rouge. Nous considérons que les observations qui se trouvent au-dessus de celui-ci sont des niveaux de taux de rachat caractéristiques des périodes de crise, soient les dates suivantes :

- Janvier 2008 ;
- octobre 2008 ;
- mars 2010 ;
- novembre 2011 ;
- décembre 2011 ;
- février 2012 ;
- mars 2012 ;
- avril 2012 ;
- juin 2012.

Nous retrouvons bien ici les années de « crise » grossièrement cernées à l'aide des boîtes à moustaches. Le MEP permet de cibler plus précisément les mois pour lesquels les taux de rachat sont les plus élevés mais ne permet pas de quantifier la période sur laquelle s'étend une crise. De plus nous retombons globalement sur les périodes de crises recensées grâce à nos recherches documentaires. Au vu de ces résultats, nous pouvons seulement supposer que les années 2008, 2010, 2011 et 2012 ont été critique par rapport aux rachats et sont par conséquent potentiellement des années d'instabilité économique. Nous restons prudents en ce qui concerne les années 2007 et 2009 et garderons à l'esprit

dans la suite de notre étude que les taux de rachat observés en juin 2007 et mars 2009 sont très proches du seuil que nous avons fixé.

Contrairement aux boîtes à moustaches, la méthode du MEP permet d'analyser les données dans leur ensemble et nous évite de devoir choisir une segmentation temporelle des données qui pourrait être préjudiciable. Il faut cependant faire attention au choix du seuil qui pourrait affecter la suite de l'analyse s'il est mal déterminé.

7.4 Autres méthodes

En 2004, Robert Boyer, directeur de Recherche au CNRS, Mario Dehove et Dominique Plihon, professeurs associés à l'Université de Paris XIII (Centre d'économie de Paris-Nord) ^[11] publient conjointement un rapport ayant pour but l'analyse des crises financières (notamment les crises bancaire et de change). Ils déterminent différentes méthodes afin de repérer les périodes de crise tant au niveau national qu'international. Les méthodes empiriques proposées se basent sur l'observation des évolutions des grandeurs macroéconomiques (ou autres) des pays ayant subi une crise afin de repérer des « anomalies ». Ainsi 3 approches différentes sont proposées⁸ :

- La méthode des « events ».
- La méthode de modèle multivarié logit ou probit.
- La méthode des signaux ou des « indicateurs avancés ».

Ces méthodes constituent des pistes supplémentaires pour le repérage des crises financières. Les résultats du MEP recoupant ceux de la recherche documentaire que nous avons effectuée en amont, nous considérons ces derniers comme étant satisfaisants et n'explorerons pas d'avantage les approches citées ci-dessus.

8. Le lecteur intéressé pourra se référer au rapport en question pour avoir le détail de ces méthodes.

8. Analyse de la tendance et de la saisonnalité

8.1 Une double ANOVA à un facteur

Avant de tenter toute modélisation des rachats, il convient de les étudier d'un point de vue temporel. Nous cherchons ici à déterminer si le comportement de rachat des assurés présente une tendance et/ou une saisonnalité car si c'est le cas, il faudra s'assurer d'isoler ces mouvements (prévisibles) dans les rachats structurels. Nous avons vu plus haut (section 6.1) que graphiquement, les taux de rachats globaux ne présentaient aucune tendance à la hausse ou à la baisse, mais comportaient toutefois une composante saisonnière.

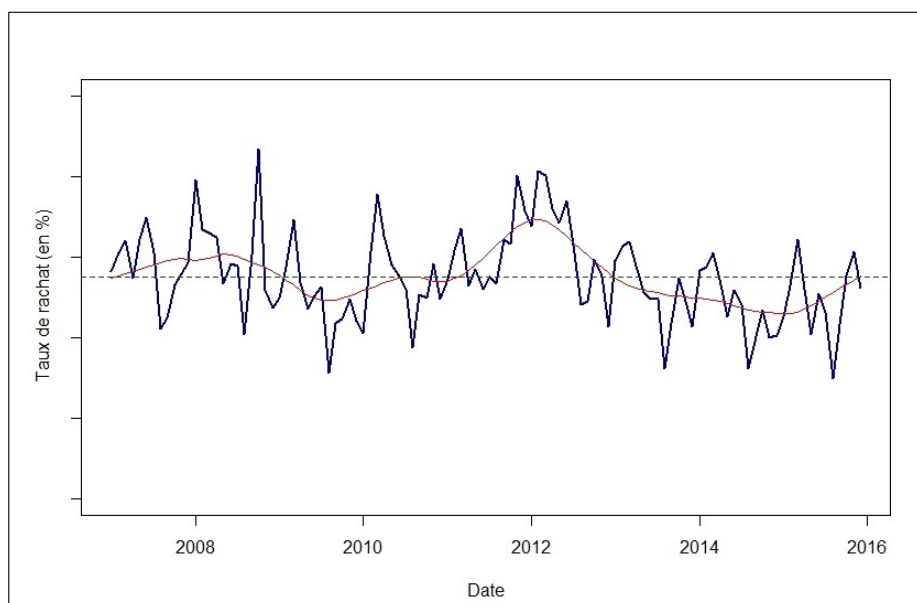


FIGURE 8.1 – Rachats observés sur le portefeuille Épargne

Nous allons à présent tenter de le montrer quantitativement. Pour cela, nous utilisons une technique statistique fondamentale, l'analyse de la variance (ANOVA) à un facteur^[9], qui vise à comparer des moyennes sur plusieurs échantillons. Nous ne décrivons ici que notre démarche, le lecteur intéressé pourra se référer à la bibliographie pour une description plus théorique de la méthode.

Nous essayons d'expliquer l'évolution des taux de rachat à l'aide de deux ANOVA successives, la première ayant comme facteur l'année de rachat et la deuxième, le mois de rachat. Nous comptons donc 12 modalités (correspondant aux mois d'une année) pour l'année de rachat et 9 modalités (correspondant aux 9 années de l'historique des rachats) pour le mois de rachat.

Nous testons les hypothèses :

H0 : tous les échantillons ont la même moyenne : $m_1 = m_2 = \dots = m_k$.

H1 : au moins l'un des échantillons à une moyenne sensiblement différente des autres.

Où k désigne le nombre d'échantillons.

Le nombre de mesure par échantillon est désigné par n et le nombre total de mesure $k \times n$. L'analyse de la variance à un facteur consiste à chercher le rapport entre la variance entre les groupes (ou variance inter-groupes) et la variance à l'intérieur même des groupes (variance intra-groupes). La valeur de ce rapport, appelé F , est comparée à celle de la table de F de Snedecor, table à double entrée avec pour numérateur $(k - 1)$ et pour dénominateur $(k.n - k)$.

Il faut dans un premier temps calculer :

- (a) La variance totale par rapport à la moyenne globale des n mesures.
- (b) La variance intra-groupes (autrement dit celle qui n'est pas liée aux différentes conditions expérimentales).

Ensuite, en faisant la différence $((a) - (b))$ nous obtenons la variance inter-groupes (celle qui est liée aux différentes conditions expérimentales).

$$a = ((a) - (b)) + b$$

$$\text{Variance totale} = \text{Variance inter-groupes} + \text{Variance intra-groupes}$$

$$\text{SCE à la moyenne générale} = \text{SCE factorielle} + \text{SCE résiduelle}$$

Où SCE est la Somme des Carrés des Écarts.

$$\sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^{n_i} (x_{ik} - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^p n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^{n_i} (x_{ik} - \bar{x}_i)^2$$

Enfin nous calculons le rapport F (à ne pas confondre avec la statistique de test de vérification de l'homogénéité de la variance) :

$$F = \frac{\text{Variance inter-groupes}}{\text{Variance intra-groupes (ou résidu)}}$$

Avant de procéder à l'analyse de la variance, nous pouvons dans un premier temps observer les données à l'aide de boîtes à moustaches pour avoir un premier aperçu de la dispersion des données.

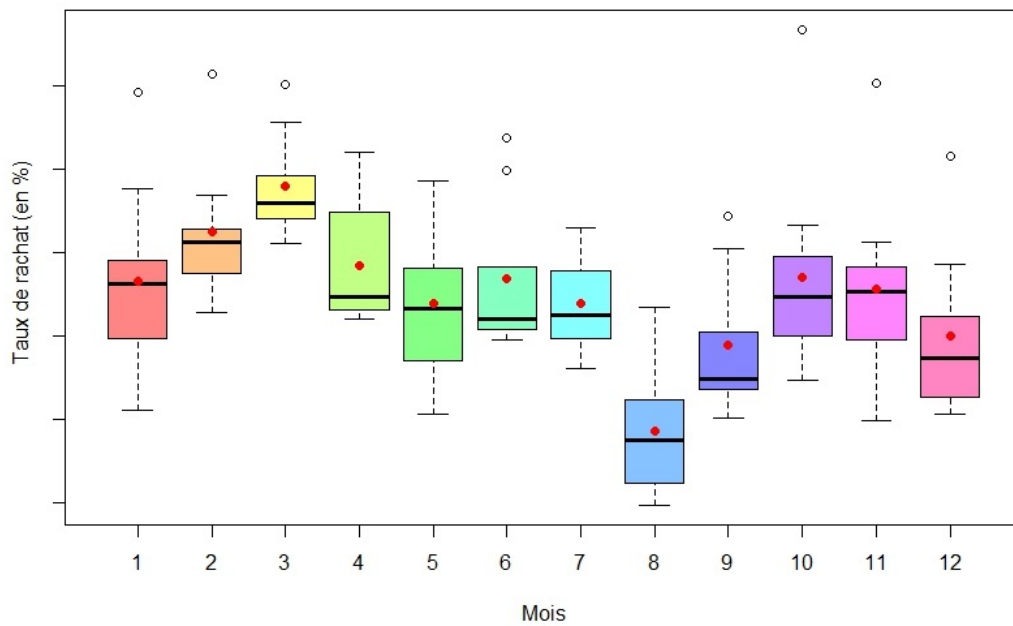


FIGURE 8.2 – Première ANOVA : facteur année de rachat

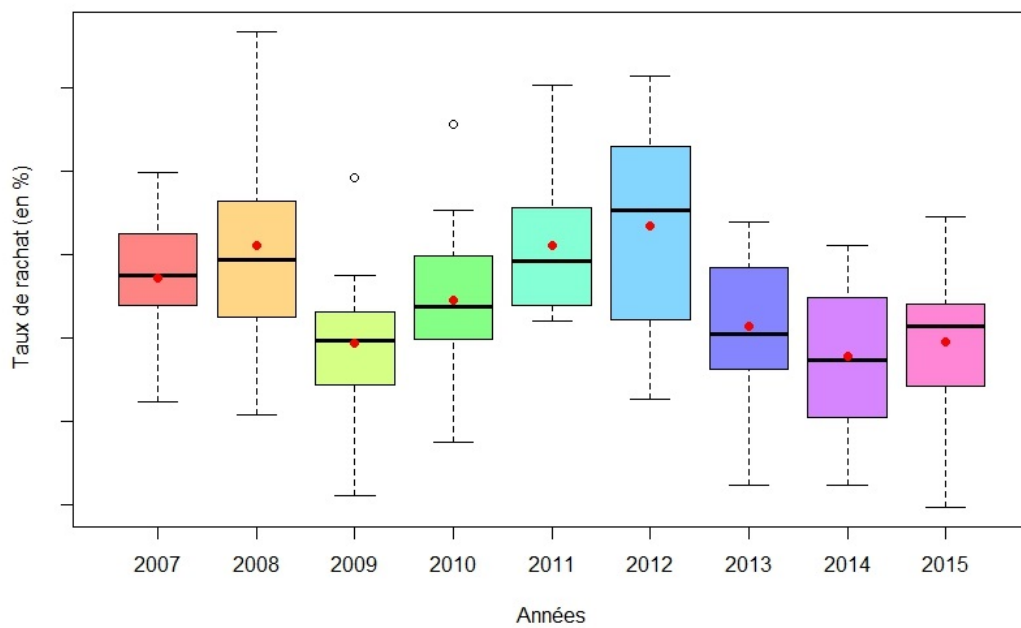


FIGURE 8.3 – Deuxième ANOVA : facteur mois de rachat

Nous pouvons constater visuellement pour les deux graphiques que les moyennes des rachats selon les facteurs année et mois ne sont pas alignées. Puisque que nous ne voyons pas de tendance particulière sur les moyennes, nous pouvons a priori supposer que les taux de rachat historiques ne comportent pas de tendance.

Nous effectuons à présent deux ANOVA successives, la première avec comme facteur les années et la seconde, les mois.

	Estimateur de la variance inter-groupes	Estimateur de la variance intra-groupes	p-value
ANOVA 1	0,011848	0,002084	5,53E-07
ANOVA 2	0,010407	0,002496	0,00025

FIGURE 8.4 – Résultats des deux ANOVA successives

Dans le cas de la première ANOVA, la p-value est inférieure au risques d'erreur $\alpha = 5\%$, nous rejetons l'hypothèse H_0 : les moyennes observées pour chaque mois ne sont pas les mêmes, il y a donc une saisonnalité annuelle. Pour la suite de l'analyse nous avons couplé les résultats ci-dessus avec plusieurs tests d'homogénéité de la variance (Tukey, Levene et Kruskal) afin de s'assurer de la cohérence des résultats. Nous arrivons finalement à la conclusion que les taux de rachat observés ne présentent aucune tendance particulière (mais plutôt des changements de niveaux) et une saisonnalité annuelle.

Ces résultats peuvent se vérifier graphiquement en utilisant une décomposition tendancielle et saisonnière de la série temporelle.

8.2 Détection de la saisonnalité : l'autocorrélogramme simple

Une série temporelle (ou chronologique) est une suite réelle finie $(X_t)_{1 \leq t \leq n}$, dont l'indice t représente une unité de temps (jour, semaine, mois ou année, par exemple). Généralement, il est courant de décomposer ce type de série suivant 3 composantes :

- une tendance T_t ;
- une saisonnalité S_t de période s ;
- un aléa ε_t .

Parfois, il est possible de constater une quatrième composante cyclique que l'on peut éventuellement capturer lorsque l'on dispose d'un jeu de données assez grand. Le graphique ci-dessous représente la décomposition de notre historique de rachats suivant les trois premières composantes citées plus haut.

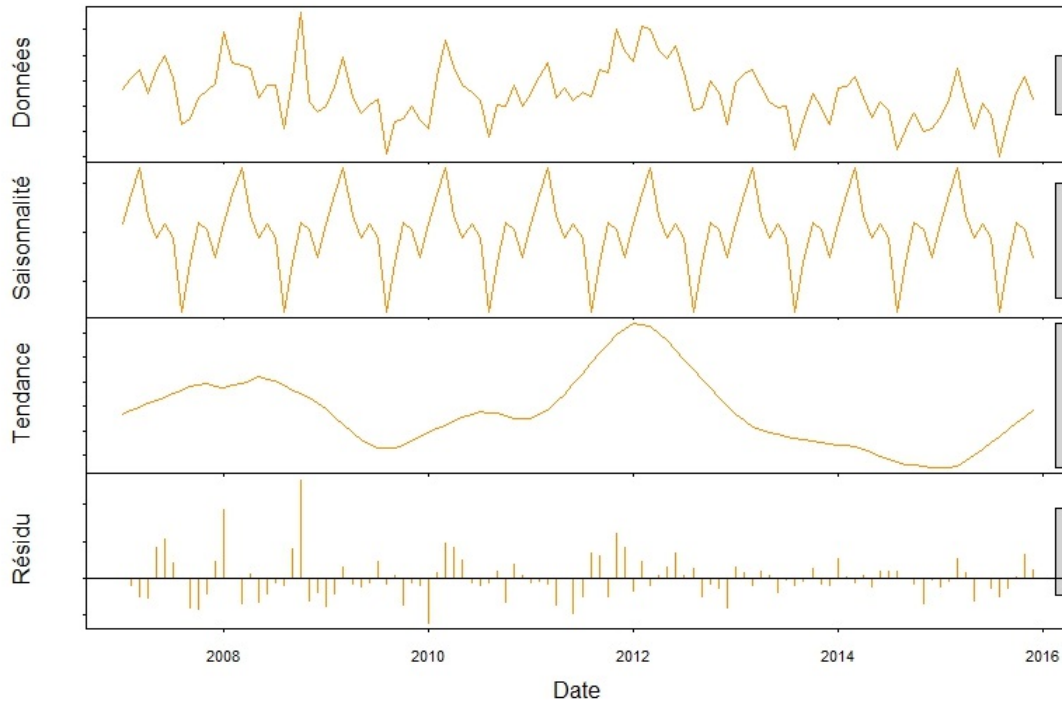


FIGURE 8.5 – Décomposition tendancielle et saisonnière des taux de rachat

Graphiquement, nous retrouvons l'absence d'une tendance haussière ou baissière globale et constatons plutôt des changements de niveaux tout au long de notre historique. De plus, la décomposition de la série chronologique permet de mettre en évidence une saisonnalité qui semble annuelle ce qui conforte les résultats de la double ANOVA à un facteur.

Pour nous en convaincre, nous pouvons étudier les autocorrélations de notre historique à l'aide d'un autocorrélogramme simple. Avant d'aborder ce principe nous devons introduire la notion de stationnarité.

Proposition 1 :

Un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est fortement (ou strictement) stationnaire si $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall (t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{Z}^k, \forall h \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\mathbb{L}(X_{t_1}, \dots, X_{t_k}) = \mathbb{L}(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_k+h})$$

Le processus est faiblement stationnaire si son espérance et ses autocovariances sont invariantes par translation temporelle :

- i. $\forall t \in \mathbb{Z}, \mathbb{E}[X_t] = \mu$
- ii. $\forall (s, t) \in \mathbb{Z}^2, \text{Cov}(X_s, X_t) = \text{Cov}(X_{s+h}, X_{t+h})$

On a alors :

$$\text{Cov}(X_s, X_t) = \gamma(t - s) = \gamma(h)$$

Avec notamment :

$$\gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t-h}) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h})$$

Proposition 2 :

Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus stationnaire. On appelle autocorrélogramme simple du processus (X_t) la fonction ρ telle que $\forall h \in \mathbb{Z}$:

$$\rho(h) = \text{Corr}(X_t, X_{t-h}) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$$

Nous traçons ci-dessous l'autocorrélogramme relatif à notre historique de rachats.

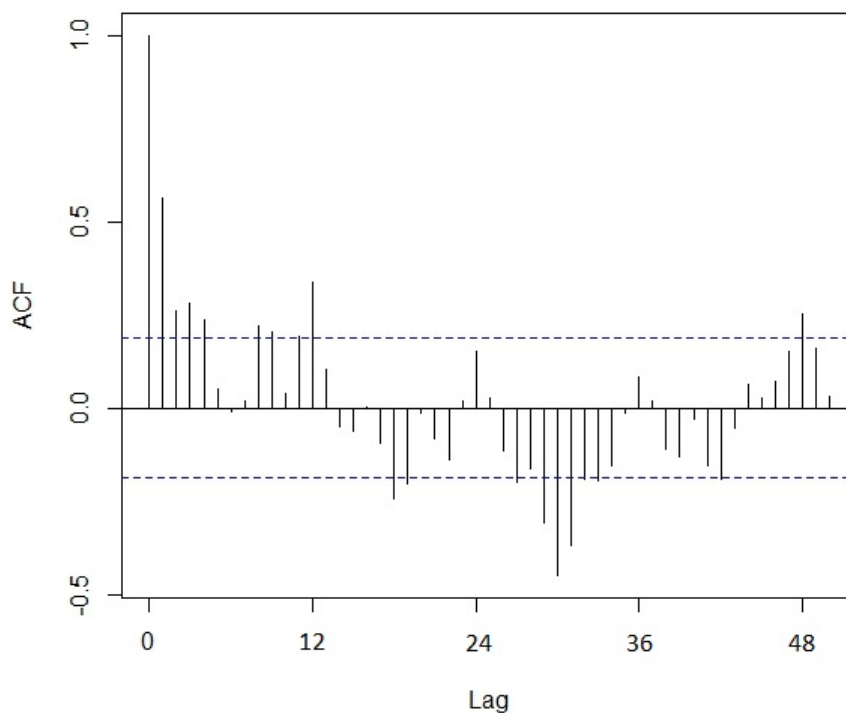


FIGURE 8.6 – Autocorrélogramme simple des taux de rachat

L'autocorrélogramme présente une décroissance lente vers 0, ce qui traduit un problème de non-stationnarité, mais aussi une périodicité. Nous différencions une première fois la série chronologique grâce à l'opérateur $(1 - B)$ (où B est tel que $BX_t = X_{t-1}$) pour supprimer tout effet de tendance puis une seconde fois avec l'opérateur $(1 - B^{12})$ pour cette fois supprimer la saisonnalité supposée de période $s = 12$. Cette double différenciation nous permet d'obtenir une vitesse de décroissance acceptable vers 0 et de ce fait d'identifier un modèle *ARMA* sur la série : $(1 - B)(1 - B^{12})(X_t)$.

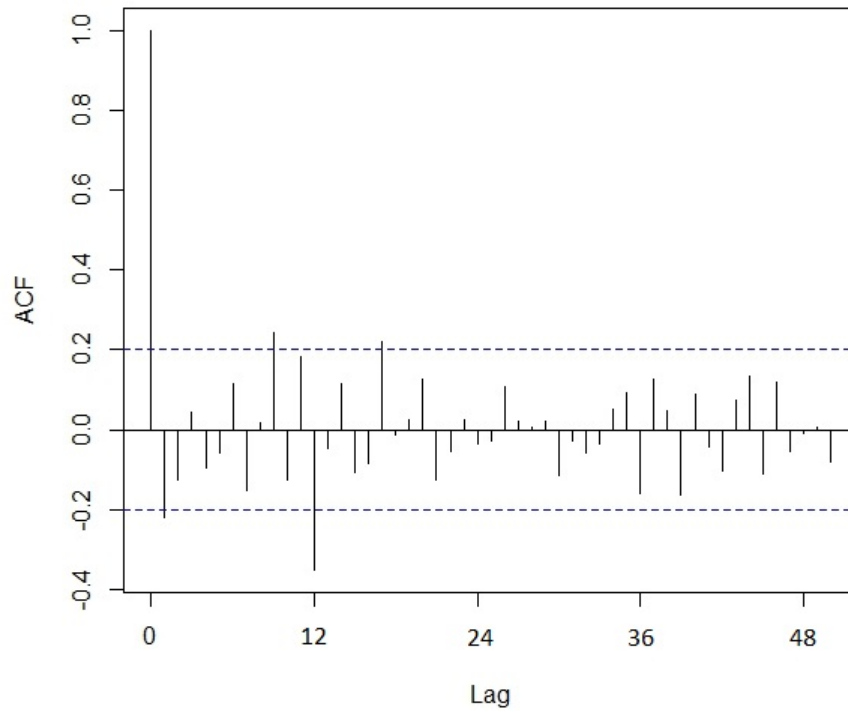


FIGURE 8.7 – Autocorrélogramme simple des taux de rachat avec double différenciation

Conclusion :

L'analyse de ces différents résultats nous laisse penser que les assurés semblent avoir un comportement de rachat périodique pouvant s'expliquer par des événements saisonniers qui pourraient très bien s'apparenter aux périodes d'imposition ou encore de vacances d'été par exemple.

9. Dissociation des rachats conjoncturels et structurels

9.1 La transformée de Fourier rapide

Dans la mesure où les montants de rachat et les nombres de contrats rachetés récoltés dans notre base de données sont les valeurs finales observées à la fin de chaque mois, il n'est pas absurde de penser que les taux rachat calculés contiennent à la fois les taux de rachats structurels et les taux de rachats conjoncturels.

Notre étude part sur l'hypothèse que ces deux types de taux sont liés et que nous devons avant tout trouver un moyen de les séparer afin de pouvoir étudier le taux qui nous intéresse réellement, à savoir le taux de rachats conjoncturels.

Le rachat structurel est par définition un phénomène répétitif qui s'observe constamment et ce quelque soit le pas de temps. Il s'explique par le comportement moyen que l'on peut observer chez les assurés qui le plus souvent ajustent leurs stratégies de rachat en fonction des caractéristiques inhérentes aux contrats d'assurance vie comme la fiscalité liée à leur ancienneté par exemple.

Un signal déterministe est un signal dont on peut connaître la valeur à chaque instant et ce, de manière certaine. Il s'oppose en ce sens aux signaux aléatoires dont on ne connaît dans le meilleur des cas que la probabilité de réalisation pour chacune des valeurs.

La méthode Fast Fourier Transform (FFT) nous permet de faire la distinction entre un signal déterministe qui résume toute l'information liée la périodicité du signal, et un signal aléatoire qui correspond à la partie non expliquée par le signal déterministe que l'on appelle résidu ou bruit. À partir de là l'analogie entre le traitement du signal et les taux de rachat observés en assurance vie devient plus évidente.

Outre les applications en physique, la FFT peut également être utilisée en finance. En effet, la FFT se retrouve dans la plupart des analyseurs du marché. Nous pouvons prendre l'exemple de Peter Carr et Dilip B. Madan^[17] qui en 1999 ont tenté de valoriser le prix d'une option grâce à cette méthode.

9.1.1 Théorie

Nous proposons ici une brève introduction au principe de la FFT^[12] qui permet de représenter un phénomène temporel dans le domaine fréquentiel.

Théorème de Fourier : Toute fonction continue $f(t)$ est décomposable en série de Fourier. Si de plus cette fonction est périodique de période T , le nombre de termes de la décomposition est fini. La fonction peut alors s'écrire comme une somme (finie ou infinie) de sinus (ou de cosinus).

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sin\left(\frac{2\pi}{T}k.t\right) + b_k \cos\left(\frac{2\pi}{T}k.t\right)$$

Avec :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt, \quad b_0 = 0$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T}k.t\right) dt \quad k \geq 1$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T}k.t\right) dt \quad k \geq 1$$

Ce qui est équivalent à :

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=0}^{+\infty} A_k \cos\left(\frac{2\pi}{T}k.t - \phi_k\right)$$

Avec $\forall k \geq 0$:

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

$$\phi_k = \arctan \frac{b_k}{a_k}$$

Où :

- a_0 est la valeur moyenne du signal ;
- $a_k \sin\left(\frac{2\pi}{T}k.t\right) + b_k \cos\left(\frac{2\pi}{T}k.t\right) = A_k \cos\left(2.k.\pi.\frac{t}{T} - \phi_k\right)$ est l'harmonique de rang k ;
- A_k l'amplitude, $f_k = \frac{k}{T}$ la fréquence et $-\phi_k$ la phase à l'origine du signal associées au $k^{\text{ème}}$ terme.

Remarque : $\forall k$, si $f(t)$ est pair alors $b_k = 0$ ou bien si $f(t)$ est impair alors $a_k = 0$.

Dans la pratique cela veut dire qu'une fonction peut se décomposer en une somme de sinus (ou cosinus) de périodes multiples de la période de base de notre fonction. Les coefficients de la série de Fourier représentent alors le niveau « énergétique de chacune des fréquences élémentaires ».

La principale application de l'analyse FFT est la mise en évidence des périodicités d'un signal et le calcul de « l'énergie » contenue dans ce même signal pour chacune des fréquences. En outre,

cette méthode peut servir à observer des signaux qui ne sont pas périodiques (aléatoires par exemple), cependant cette extension non naturelle de la méthode à ce type de signal appelle à la plus grande prudence dans l'interprétation des résultats.

La représentation mathématique d'une série temporelle par l'analyse de Fourier est la suivante :

$$G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot \exp(-i \cdot 2\pi \cdot f \cdot t) dt \quad (1)$$

Le signal réel $g(t)$ est multiplié par un nombre complexe et intégré sur une durée infinie.

La formule ci-dessus s'applique à un signal continu. Or, nous ne disposons que de données discrètes. Nous utilisons de ce fait la transformée de Fourier discrète pour décomposer et expliquer les taux de rachats globaux. La formule précédente s'écrit alors :

$$G(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g(n) \exp\left(-i \frac{2\pi \cdot k \cdot n}{N}\right)$$

Avec k et n qui se réfèrent respectivement à f_k et t_n .

La reconstitution du signal à partir du spectre fait appel aux fréquences et amplitudes qu'il contient et à la fonction définie en (1).

9.1.2 Application

Afin de nous donner une première impression sur cette méthode, nous créons dans un premier temps un échantillon test. Cet échantillon est construit à partir d'une composante aléatoire basée sur la valeur absolue d'une loi normale $\mathcal{N}(\mu = 10, \sigma = 20)$ et ce sur une période de 32 mois. Nous lui ajoutons ensuite une tendance, une saisonnalité de 12 mois et une composante cyclique de période égale à 64 mois. Nous obtenons le spectre suivant :

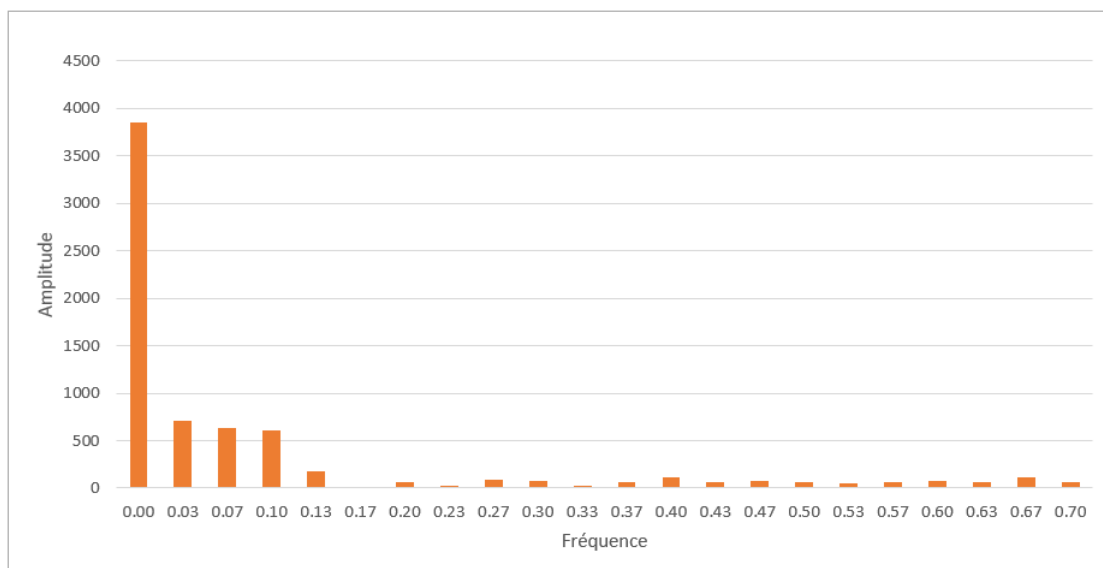


FIGURE 9.1 – Spectrogramme du test FFT

La FFT met en évidence une composante constante (de fréquence nulle que nous pouvons assimiler à la composante linéaire) qui est très importante. Les trois composantes suivantes se démarquent et ont pour périodes respectives (inverse de la fréquence) : 31, 15.50 et 10.33 mois. Nous ne considérerons toutefois que les deux premières valeurs que nous associerons respectivement à la composante cyclique (ayant la plus grande période par définition) et à la composante saisonnière. Ainsi, nous obtenons une tendance constante, un phénomène cyclique d’une période de 31 mois (alors que nous l’avons défini à 64 mois) et un phénomène saisonnier de période 15 mois (qui était initialement simulé avec une période de 12 mois). Étant donné que les résultats de ce premier test sont peu concluants, nous craignons que l’application aux rachats ait de grande chance de ne pas aboutir.

Nous exposons ci-dessous les résultats de la méthode sur notre historique de rachats.

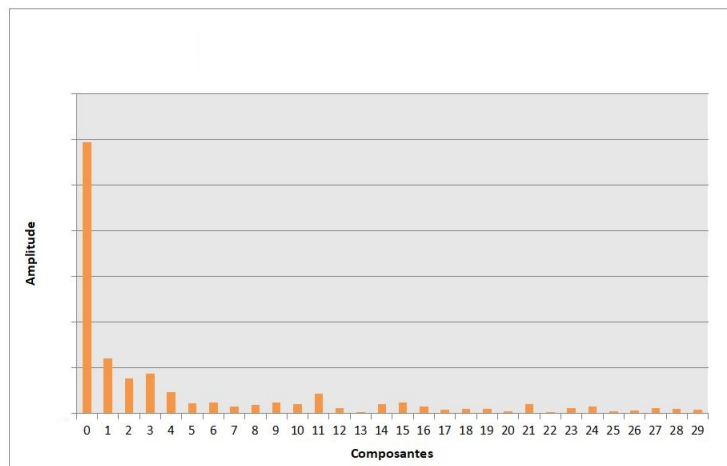


FIGURE 9.2 – Spectrogramme des taux de rachat

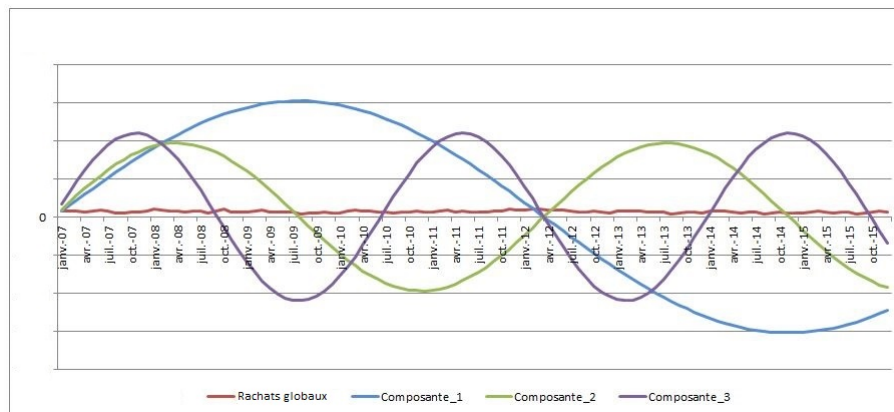


FIGURE 9.3 – Représentation des trois premières composantes

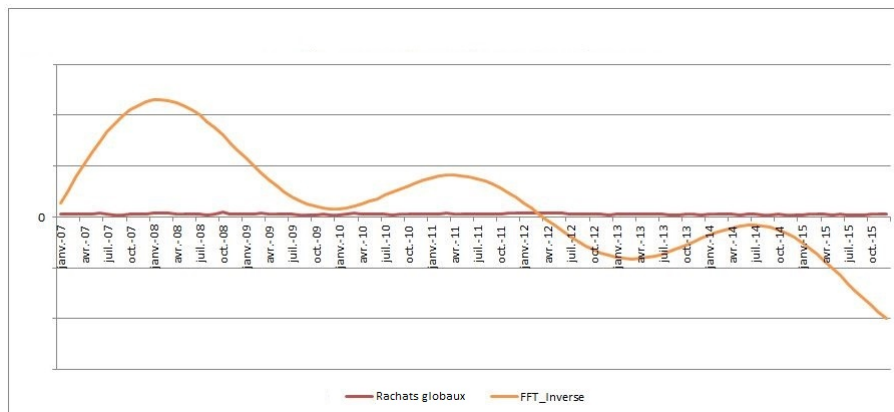


FIGURE 9.4 – Reconstitution du signal à partir des trois premières composantes

Le spectrogramme décrit 4 composantes principales (composantes ayant les plus fortes amplitudes) que nous assimilons, par identification, à la tendance, le cycle, la saisonnalité et la quatrième que nous ne pouvons pas identifier. Nous constatons que le modèle considère que les taux de rachat présentent une composante tendancielle non négligeable ce qui va à l'encontre des analyses effectuées précédemment. Comme nous le suspicions, la reconstitution du signal à partir des trois premières composantes que nous avons assimilés à la tendance, le cycle et la saisonnalité, est mauvaise.

9.1.3 Limites de la méthode

Suite aux résultats que nous avons obtenus, nous pouvons affirmer que le choix du nombre de composantes qui permettent de reconstituer le signal de départ est très important. Prendre un trop petit nombre de composantes donne une approximation grossière de la périodicité et de l'amplitude du signal. Dans le cas inverse, c'est-à-dire si un nombre de composantes élevé est sélectionné, il se pourrait qu'une partie non négligeable du signal aléatoire se retrouve associée au signal périodique. Bien que la FFT ne soit pas adaptée à notre cas d'étude, elle peut quand même être utile en tant qu'outil d'aide à la décision.

Les résultats obtenus avec cette méthode ne sont pas exploitables pour la suite de notre étude. Nous allons devoir nous tourner vers une autre méthode pour dissocier rachats structurels et dynamiques.

9.2 Le lissage exponentiel de Holt-Winters

Les méthodes de lissage exponentiel sont des méthodes de prévision à court terme qui ont pour objectif de prévoir à la date T une série temporelle à un horizon h à partir de (X_1, \dots, X_T) . Le lissage de Holt-Winters^[13] est à ce jour la méthode de lissage exponentielle la plus aboutie. La particularité de cette technique est qu'elle prend en compte à la fois la tendance et la saisonnalité d'une série chronologique en donnant aux observations passées un poids décroissant en fonction de leur ancienneté. En outre, elle est plus réactive que les moyennes mobiles ou les modèles utilisant la régression car elle prend rapidement en compte une modification de tendance. Cette méthode peut être par exemple utilisée à des fins de prévision de ventes, pour prévoir les cours de bourse (dans le cadre de l'analyse technique) mais peut aussi servir à détecter les valeurs aberrantes ou extrêmes.

9.2.1 Théorie

Le lissage de Holt-Winters est une méthode récursive qui consiste à supposer que X_t est approximable au voisinage de T par une droite d'équation de la forme :

- $a_T + (t - T)b_T + S_t$ dans le cas d'un modèle additif.
- $[a_T + (t - T)b_T]S_t$ dans le cas d'un modèle multiplicatif.

Les coefficients a , b et S sont déterminés de manière récursive. Le facteur saisonnier S prend en compte s la période du cycle saisonnier de la série temporelle. La valeur de s dépend de la périodicité des données, par exemple $s = 4$ pour des données trimestrielles ou encore $s = 12$ pour des données mensuelles. Nos observations étant mensuelles, nous prendrons donc par la suite $s = 12$.

Bien que les formules de mise à jour des coefficients et de prévision diffèrent selon le modèle utilisé, l'initialisation des coefficients se fait quant à elle de la même manière.

Soit $\hat{X}_t(h)$ la prévision de X_t à l'instant $t = T + h$.

Initialisation :

L'initialisation des coefficients requiert $3s$ valeurs : (a_1, \dots, a_s) , (b_1, \dots, b_s) et (S_1, \dots, S_s) . On choisit de manière naturelle pour $t = 1, \dots, s$:

$$\begin{cases} \text{Niveau : } \hat{a}(t) = \frac{X_1 + \dots + X_s}{s} \\ \text{Tendance : } \hat{b}(t) = \frac{1}{s} \left[\frac{X_{1+s} - X_1}{s} + \dots + \frac{X_{2s} - X_s}{s} \right] \\ \text{Saisonnalité : } \hat{S}_t = \frac{X_t}{\hat{a}(t)} \end{cases}$$

1 - Cas additif :

Dans le cas de la méthode saisonnière additive, les formules de mise à jour des coefficients sont les suivantes au voisinage de T :

$$\begin{cases} \text{Niveau : } \hat{a}(T) = \alpha(X_T - \hat{S}_{T-s}) + (1 - \alpha)[\hat{a}(T-1) + \hat{b}(T-1)] \\ \text{Tendance : } \hat{b}(T) = \beta(\hat{a}(T) - \hat{a}(T-1)) + (1 - \beta)\hat{b}(T-1) \\ \text{Saisonnalité : } \hat{S}_T = \gamma(X_T - \hat{a}(T)) + (1 - \gamma)\hat{S}_{T-s} \end{cases}$$

Il en découle la prévision à la date T et à l'horizon h donnée par :

$$\begin{cases} \hat{X}_T(h) = \hat{a}_T + h\hat{b}_T + \hat{S}_{T+h-s} & \text{si } h \in 1, \dots, s \\ \hat{X}_T(h) = \hat{a}_T + h\hat{b}_T + \hat{S}_{T+h-2s} & \text{si } h \in s+1, \dots, 2s \\ \dots & \end{cases}$$

2 - Cas multiplicatif :

Dans le cas de la méthode saisonnière multiplicative, les formules de mise à jour des coefficients sont les suivantes au voisinage de T :

$$\begin{cases} \text{Niveau : } \hat{a}(T) = \alpha \frac{X_T}{\hat{S}_{T-s}} + (1 - \alpha)[\hat{a}(T-1) + \hat{b}(T-1)] \\ \text{Tendance : } \hat{b}(T) = \beta(\hat{a}(T) - \hat{a}(T-1)) + (1 - \beta)\hat{b}(T-1) \\ \text{Saisonnalité : } \hat{S}_T = \gamma \frac{X_T}{\hat{a}(T)} + (1 - \gamma)\hat{S}_{T-s} \end{cases}$$

La prévision à la date T et à l'horizon h est alors donnée par :

$$\begin{cases} \hat{X}_T(h) = (\hat{a}_T + h\hat{b}_T)\hat{S}_{T+h-s} & \text{si } h \in 1, \dots, s \\ \hat{X}_T(h) = (\hat{a}_T + h\hat{b}_T)\hat{S}_{T+h-2s} & \text{si } h \in s+1, \dots, 2s \\ \dots & \end{cases}$$

Notons que quel que soit le modèle, les paramètres de la méthode Holt-Winters α , β et γ sont tous dans $]0,1[$. Nous choisirons ceux qui minimiseront le carré moyen des résidus (*Mean Square Deviation* ou *Mean Square Errors - MSE*).

Pour tout $t \in \{1, \dots, n\}$, on note $e_t = X_t - \hat{X}_t$ l'erreur prévisionnelle. On a :

$$\text{MSE} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n e_t^2$$

9.2.2 Application

Nous utilisons à présent la méthode de Holt-Winters (modèle multiplicatif) pour dissocier les taux de rachats structurels et les taux de rachats dynamiques. Nous obtenons les résultats suivants :

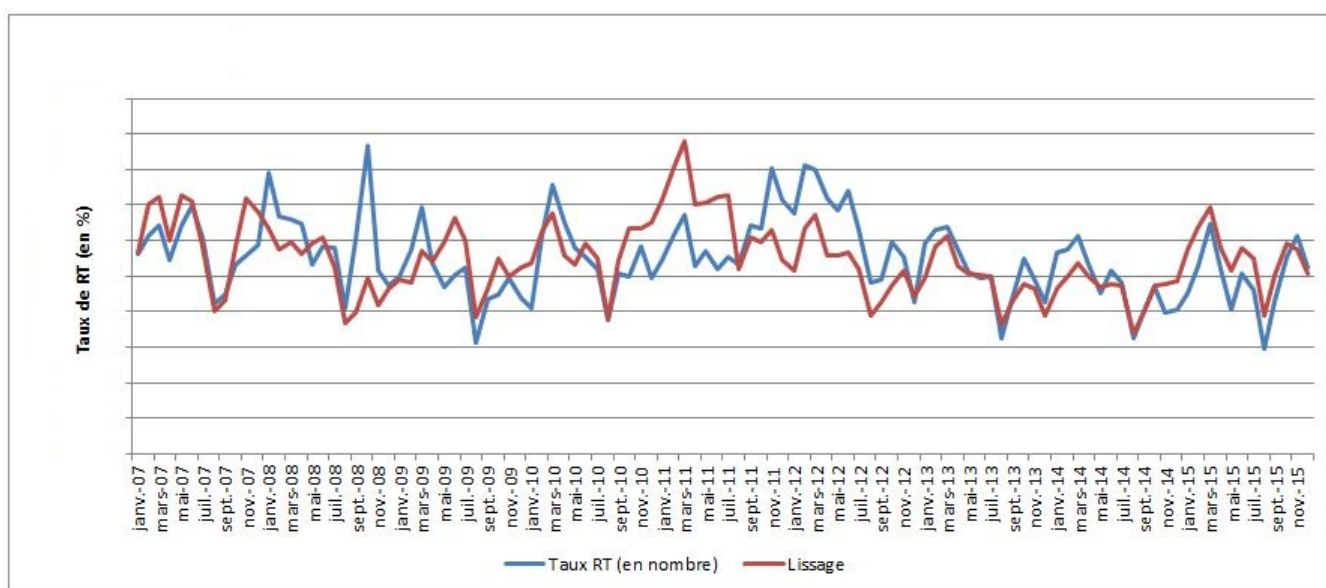


FIGURE 9.5 – Application du lissage de Holt-Winters aux rachats globaux

Les données lissées représentent les taux de rachats structurels constatés sur la période d'étude. Nous pouvons observer graphiquement sur les périodes que nous considérons comme n'étant pas des périodes de crise (2007, 2013, 2014 et 2015), que le modèle lissé est plus proche des taux de rachat réellement observés. De plus, nous constatons que les données lissées présentent bien une saisonnalité, sont sans tendance à la hausse ou à la baisse et tentent de s'adapter en changeant de niveau. Nous obtenons les rachats dynamiques en calculant le résidu, c'est-à-dire en faisant la différence entre les taux de rachats globaux et les taux de rachats structurels.

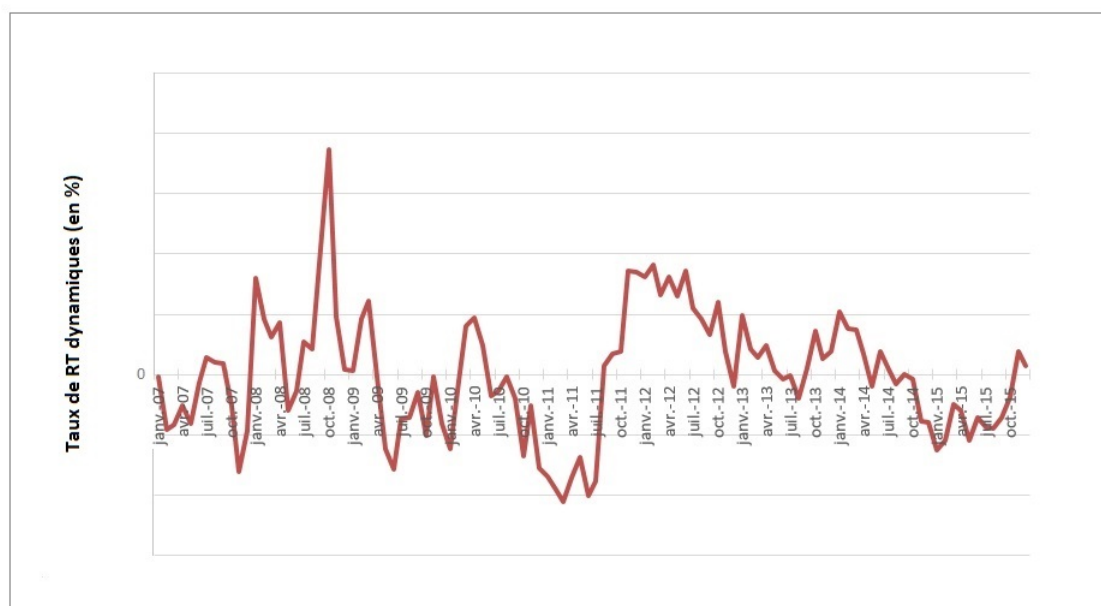


FIGURE 9.6 – Taux de rachats dynamiques sur la période 2007-2015

Ces deux graphiques doivent être interprétés conjointement. Le décalage perçu entre les années 2011 et 2012 est dû au caractère prédictif de la méthode qui se base sur les taux de rachats globaux des années précédentes pour prédire les taux de rachats structurels des années suivantes. Concrètement, en 2011 le modèle s’attend à une augmentation des rachats structurels, cependant nous pouvons voir que les taux de rachats historiquement constatés sont plus faibles que les rachats structurels modélisés. Cela implique donc que sur cette période les taux de rachats dynamiques sont négatifs et viennent diminuer les structurels. Or, nous avons déterminé plus haut que le début de la crise de la dette souveraine se situait plutôt en fin 2011. Les mouvements des deux types de rachats sont cohérents avec le contexte économique. En 2012, le cas inverse s’observe. Sur cette année de crise, les rachats dynamiques viennent s’ajouter aux rachats structurels.

9.2.3 Limites de la méthode

La méthode de lissage exponentiel de Holt-Winters nous a permis de séparer les rachats structurels et dynamiques. L’un des avantages de cette technique est qu’en plus d’être reproductible opérationnellement, elle permet de concentrer les informations de niveau, de tendance et de saisonnalité (autrement dit les composantes prédictibles) dans les observations lissées. Nous pouvons apporter une critique à notre modèle : une attention particulière doit être apportée aux données de début de période. Dans l’idéal il faudrait que l’algorithme fasse ses prédictions sur plusieurs périodes hors crise afin d’être sûr de ne pas considérer un effet dynamique dans le structurel. Au vue de l’étendue de notre historique et des résultats du lissage sur la période de 2013 à 2015, nous supposons par la suite que notre modèle dissocie bien ces deux phénomènes.

Conclusion :

Les résultats de la FFT n'étant pas concluants, nous garderons ceux du lissage exponentiel de Holt-Winters pour la suite de notre étude. Nous assimilons donc les rachats structurels aux prédictions obtenues grâce à la méthode de lissage et les rachats dynamiques aux erreurs de prédiction.

Partie III : Modélisation de la loi de rachats dynamiques

10. Choix des variables explicatives

10.1 Préselection de variables et étude de corrélation

Dans le but d'expliquer les taux de rachats dynamiques, nous avons regroupé et étudié de nombreuses variables macroéconomiques. Dans notre recherche de variables explicatives nous nous sommes basés sur l'historique des précédentes crises pour sélectionner les variables qui y ont été les plus sensibles. Ainsi, nous avons pris en compte différents indices financiers tels que le CAC 40, l'EUROSTOXX 50 ou encore le VIX et d'autres paramètres macroéconomiques comme le Purchasing Managers Index (PMI), le prix du pétrole, l'Indice de Confiance des Consommateurs (ICC) ou la consommation énergétique de la France par exemple.

Notre but étant d'implémenter une nouvelle loi de rachats dynamiques cohérente avec le portefeuille Épargne dans le modèle de projection stochastique de Generali, nous pouvons relever ici une première difficulté à surmonter le cas échéant. En effet, étant donné que la valeur des rachats dynamiques se calcule à partir de la valeur stochastique des résultats futurs, si nous retenons une variable qui n'est pas représentée dans la table des 1000 scénarios économiques, nous serions dans l'obligation de projeter nous-même cette variable via un générateur de scénarios économiques et de l'inclure dans le calcul de la valeur stochastique des résultats futurs.

Dans le but de rajouter de l'information, nous calculons également les rendements et volatilités des indices financiers. Notons que les bases regroupant les données historiques des indices financiers proposent parfois, en plus des cotations, les volatilités pré-calculées des indices. Nous préférons cependant les calculer nous-mêmes car dans le cas où l'indice serait présent dans notre portefeuille d'actifs, nous pourrions calculer les volatilités projetées en reproduisant la même méthode de calcul à partir des tables de scénarios économiques qui sont à notre disposition.

Nous calculons les rendements journaliers r_t d'un actif financier à la date t à partir des prix (ou cotations) de clôture c_t de ce même actif. Le rendement se détermine de la manière suivante :

$$r_t = \ln\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right) = \ln(c_{t+1}) - \ln(c_t)$$

Puis nous obtenons un estimateur de la volatilité mensuelle en calculant pour chaque mois j l'écart-type des rendements correspondants à ce même mois.

Nous sélectionnons pour notre modélisation, les variables les plus corrélées avec les taux de rachats dynamiques. Nous utilisons pour cela le coefficient de corrélation de Pearson (noté R) qui se

traduit par la formule suivante :

$$R = \text{Corr}_{X,Y} = \frac{\text{COV}(X,Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}} = \frac{\text{COV}(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

Où $V(\cdot)$ et σ représentent respectivement les variances et écart-types des variables X et Y.

Nous testons ensuite la significativité de la corrélation de Pearson grâce au test de Student. Le test s'écrit de la manière suivante :

Hypothèses :

H0 : « le coefficient de corrélation est égal à 0 ».

H1 : « le coefficient de corrélation est significativement différent de 0 ».

Nous considérons la statistique de test suivante sous l'hypothèse H0 :

$$t = \frac{|R|}{\sqrt{\frac{1-R^2}{n-2}}} = \sqrt{n-2} \cdot \frac{\sqrt{R^2}}{\sqrt{1-R^2}}$$

Cette statistique de test suit une loi de Student à $(n-2)$ degrés de liberté (ddl). En outre la région critique du test pour le risque d'erreur $\alpha = 5\%$ est la suivante :

$$|t| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)$$

Où $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)$ est le quantile d'ordre $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la loi de Student à $(n-2)$ ddl.

Notons que la découverte d'une corrélation entre deux variables ne permet pas de conclure à l'existence d'une relation de cause à effet.

10.2 Application

Nous obtenons les résultats suivants à l'issue des tests de corrélation :

	Taux de rachats dynamiques		
	Volatilité CAC40	Volatilité EUROSTOXX50	Purchasing Managers Index (PMI)
Coefficients de corrélation	44%	42%	-41%
Tests de Student p-value	2,23E-06	4,91E-06	1,01E-05
Intervalles de confiance	[27% ; 58%]	[26% ; 58%]	[-56% ; -24%]

FIGURE 10.1 – Choix des variables explicatives selon la corrélation

Les coefficients calculés sur l'ensemble des variables exogènes montrent que ce sont les volatilités du CAC 40 et de l'EUROSTOXX 50 ainsi que le PMI qui sont les variables les plus corrélées aux taux de rachats dynamiques. Dans tous les cas la p-value est inférieure au risque d'erreur α , nous rejetons donc l'hypothèse H0.

Le PMI (ou indice des directeurs d'achat) est un indicateur composite de l'activité manufacturière d'un pays. Il s'agit d'un indicateur reflétant la confiance des directeurs d'achat qui prend en compte les prises de commandes, la production, l'emploi, les livraisons et les stocks du secteur manufacturier. Ce dernier est considéré comme l'un des indicateurs économiques les plus pertinents. Le PMI s'exprime en pourcentage. Plus cet indicateur s'éloigne des 50% et plus le rythme d'expansion ou de contraction de l'activité économique est important. Nous remarquons qu'il est négativement corrélé avec les taux de rachats conjoncturels. Cela implique qu'ils varient tous deux en sens opposés. Autrement dit, lorsque l'activité économique se porte mal, les taux de rachats dynamiques auront tendance à augmenter et inversement.

Nous constatons également que les volatilités du CAC 40 et de l'EUROSTOXX 50 sont positivement corrélées aux taux de rachats dynamiques. Ce qui nous amène à penser que plus la volatilité de ces indices est élevée (en d'autres termes plus les marchés financiers sont instables), plus les taux de rachats augmentent.

Le calcul de la corrélation entre ces deux indices nous donne un coefficient de corrélation de 99,2%. L'EUROSTOXX 50 est un indice boursier au niveau de la zone euro. Au même titre que le CAC 40 pour la France, l'EUROSTOXX 50 regroupe 50 sociétés selon leur capitalisation boursière au sein de la zone euro. L'EUROSTOXX 50 un indicateur très majoritairement franco-allemand, comme nous pouvons le constater à travers sa composition⁹ :

- 18 sociétés françaises (soit en tout 36,8% de l'indice) : Total, Sanofi, L'Oréal, LVMH, BNP Paribas, Axa, Airbus, Orange, Danone, Air Liquide, Engie, Vinci, Société Générale, Schneider Electric, Vivendi, Essilor, Saint-Gobain et Carrefour.
- 14 sociétés allemandes (soit 28,4% de l'indice) : Bayer, SAP, Daimler, Siemens, Deutsche Telekom, Allianz, BASF, BMW, Volkswagen, Deutsche Bank, Deutsche Post, Munich Re, E.ON et RWE.
- 6 sociétés espagnoles (soit 13,7% de l'indice) : Inditex SA, Banco Santander, Telefonica, BBVA, Iberdrola et Repsol.
- 5 sociétés italiennes (soit 10,9% de l'indice) : ENI, Intesa Sanpaolo, Enel, Unicredit et Generali.
- 5 sociétés néerlandaises (soit 6,3% de l'indice) : Unilever, ING, ASML Holding, Philips et Unibail-Rodamco.

9. <http://www.objectifeco.com/bourse/trading/at-chartisme-indicateurs/special-indices-eurostox-50-le-barometre-de-la-zone-euro-se-porte-bien.html>

- 1 société belge (soit 2,1% de l'indice) : AB InBev.
- 1 société finlandaise (soit 1,7% de l'indice) : Nokia.

Près de la moitié des sociétés présentes dans le CAC 40 se retrouvent dans l'EUROSTOXX 50. Cela ne nous étonne donc pas que ces deux indices soient si fortement liés.

Pour les raisons opérationnelles citées en amont, nous ne garderons que la volatilité de EUROSTOXX 50 dans la suite de notre étude.

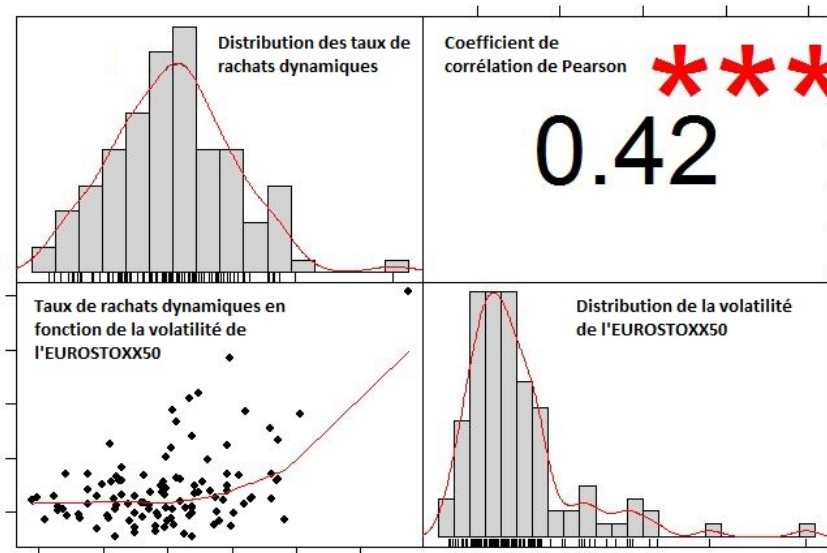


FIGURE 10.2 – Graphiques de corrélation avec la volatilité de l'EUROSTOXX 50

En observant de plus près la volatilité de l'EUROSTOXX 50 et les taux de rachats conjoncturels, nous pouvons remarquer que la tendance du graphique représentant ces deux variables n'est pas vraiment linéaire mais semble plutôt être de forme quadratique. À la lumière de cette observation, nous décidons d'étudier le carré de la volatilité de l'EUROSTOXX 50, c'est-à-dire sa variance. En suivant la même démarche que précédemment, nous obtenons les résultats suivants :

Taux de rachats dynamiques	Variance de l'EUROSTOXX50
Coefficients de corrélation	45%
Tests de Student p-value	9,89E-07
Intervalles de confiance	[29% ; 59%]

FIGURE 10.3 – Corrélation avec la variance de l'EUROSTOXX 50

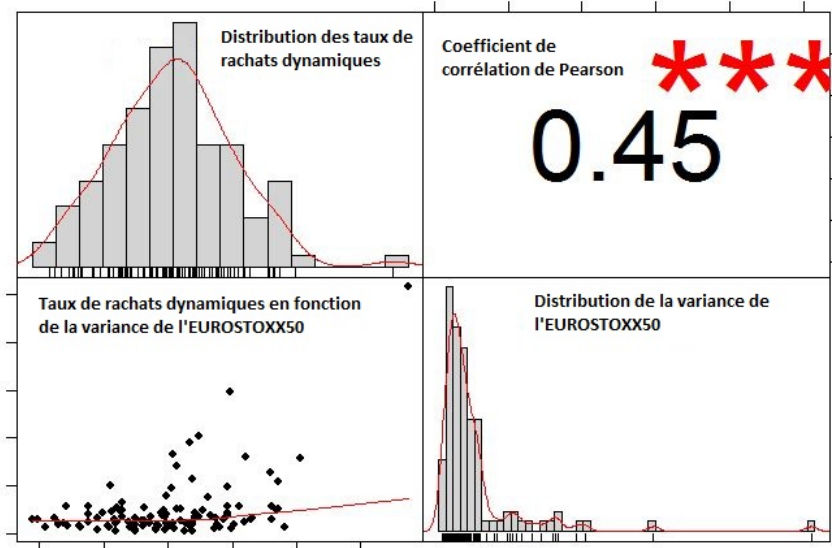


FIGURE 10.4 – Graphiques de corrélation avec la variance de l'EUROSTOXX 50

Le coefficient de corrélation entre la variance de l'EUROSTOXX 50 et les taux de rachats dynamiques est un peu plus élevé que les coefficients précédents. Nous gardons donc la variance de l'EUROSTOXX 50 comme variable explicative pour notre modèle.

10.3 Confrontation avec les taux de rachat

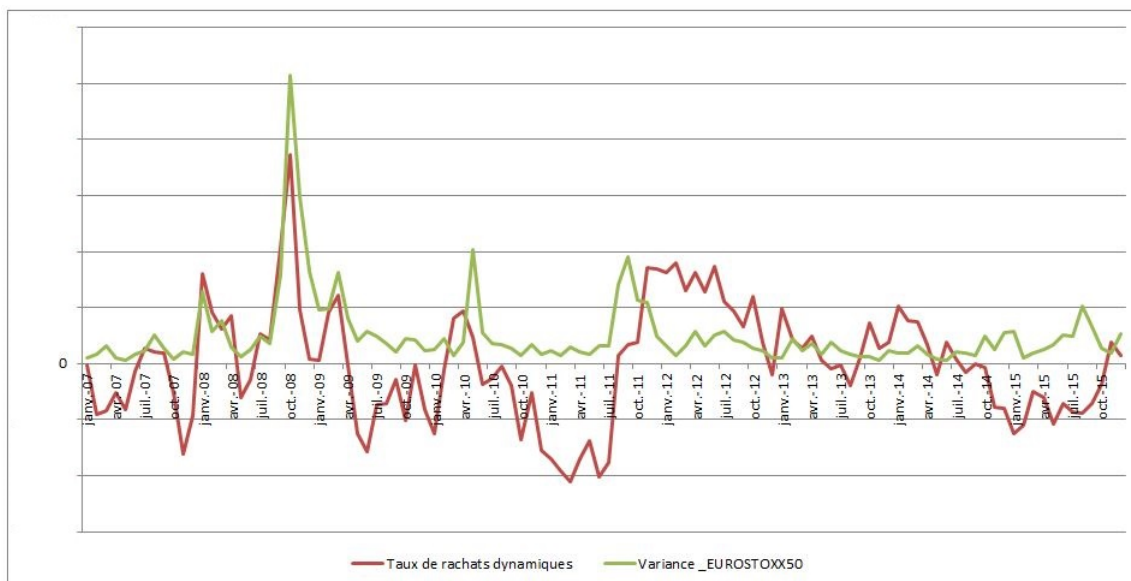


FIGURE 10.5 – Taux de rachats dynamiques en fonction de la variance de l'EUROSTOXX 50

La confrontation graphique de la variance de l'EUROSTOXX 50 et des taux de rachats montre qu'avant janvier 2012 cette dernière explique plutôt bien les pics de rachats notamment sur la période de janvier 2008 à avril 2009. Cependant, cela n'est plus le cas après janvier 2012. Le tableau ci-dessous contient les coefficients de corrélation avant et après janvier 2012.

	Avant janvier 2012	Après janvier 2012
Coefficients de corrélation	0,64%	-0,17%

FIGURE 10.6 – Corrélation de la variance de l'EUROSTOXX 50 sur historique segmenté

Nous voyons que le coefficient de corrélation entre les taux de rachats dynamiques et la variance de l'EUROSTOXX 50 est beaucoup plus fort que précédemment en ne se focalisant que sur le segment d'avant janvier 2012. La corrélation s'affaiblit après janvier 2012 et devient même négative. La variance de l'EUROSTOXX 50 ne peut donc plus être une bonne variable explicative sur cette période. Nous expliquons ces résultats par le fait qu'avant la crise de la dette souveraine de 2011, les assurés se basaient plus sur les marchés financiers pour établir leur stratégies de rachats.

Rappelons ici que les taux de rachat que nous avons extraits comportent des valeurs négatives correspondant à une baisse des rachats structurels. Or, ce type de rachats n'est pas considéré comme

prudent d'un point de vu réglementaire. De ce fait, nous considérerons par la suite que les taux de rachats dynamiques négatifs seront nuls et donc nous prendrons en compte les taux de rachats bornés inférieurement par 0 (floor à 0).

Le comportement des assurés est complexe et n'est pas constant dans le temps. Il dépend de plusieurs facteurs qui sont difficilement identifiables. Par conséquent, il serait difficile de l'expliquer à l'aide d'une seule variable comme nous avons pu le voir ci-dessus. Nous allons donc essayer de trouver si une autre variable peut expliquer le comportement des assurés sur la période d'après janvier 2012.

En réitérant la démarche ci-dessus sur notre historique segmenté, nous trouvons cette fois une forte corrélation entre le TEC 10 et les taux de rachats dynamiques sur la période d'après janvier 2012.

	Avant janvier 2012	Après janvier 2012
Coefficients de corrélation	-0,08%	0,73%

FIGURE 10.7 – Corrélation du TEC 10 sur historique segmenté

Le TEC 10 (Taux de l'Échéance Constante à 10 ans) représente le taux de rendement actuariel d'une OAT (Obligation Assimilable du Trésor) fictive d'échéance exactement égale à 10 ans.

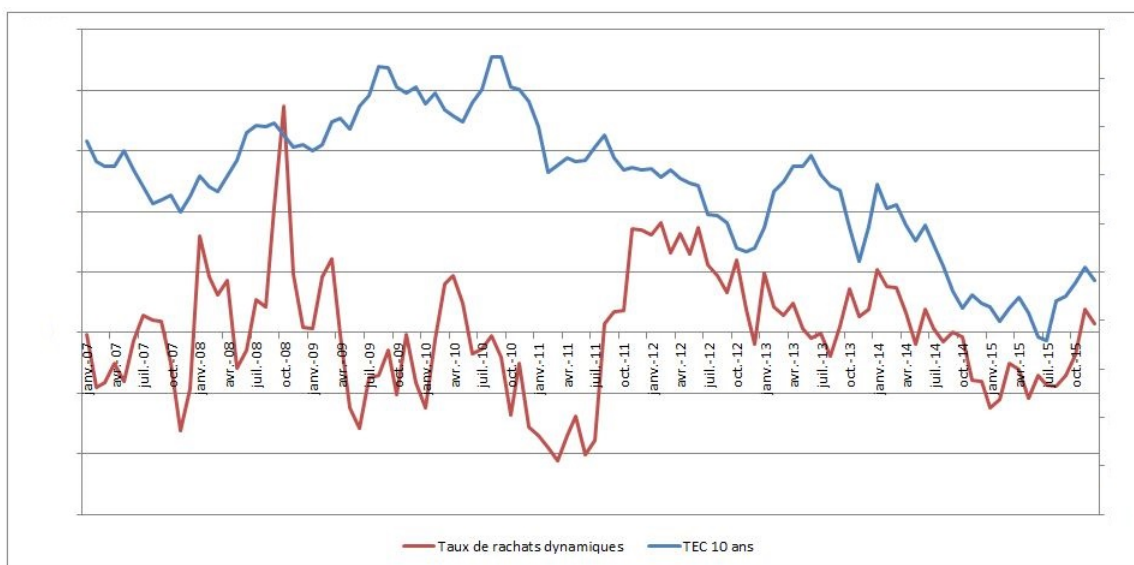


FIGURE 10.8 – Taux de rachats dynamiques en fonction du TEC 10

Graphiquement les tendances des taux de rachat et du TEC 10 varient globalement dans le même sens de janvier 2012 à décembre 2015. Il semblerait au vu de ces résultats que les assurés se soient plus fiés aux rendements des marchés obligataires après les temps qui ont suivi la crise de la dette souveraine.

10.4 Mesure des élasticités

Nous proposons dans le paragraphe suivant de comparer les élasticités du TEC 10 ainsi que du spread entre le taux servi et le taux attendu (qui nous le rappelons est la variable explicative de la loi standard), par rapport aux taux de rachats dynamiques. Nous faisons ici une analogie au concept d'élasticité utilisé en microéconomie pour mesurer différentes sensibilités telles que l'élasticité prix de la demande ou encore l'élasticité revenu de la demande.

De manière générale, l'élasticité permet de mesurer la sensibilité d'un *comportement*, dans notre cas le comportement de rachat dynamique, par rapport à un *déterminant*, autrement dit une variable explicative potentielle. L'élasticité est un nombre sans dimensions qui quand elle se rapproche de 0 indique que le comportement est insensible aux variations du déterminant. En revanche, plus cette dernière est élevée plus le comportement est sensible aux variations du déterminant. L'élasticité e du comportement au déterminant s'exprime dans le cas empirique de la manière suivante :

$$e_{\text{comportement/déterminant}} = \frac{\% \text{variation du comportement}}{\% \text{variation du déterminant}}$$

Elle signifie que lorsque le déterminant augmente de 1%, le comportement varie (à la hausse ou à la baisse) de $\pm e\%$.

Nous présentons ci-dessous les résultats du calcul des différentes élasticités.

	2008/2015	
	(R-TA)	TEC 10
Elasticité	0.979829636	-95.23715806
Valeur absolue	4.647964661	204.0513389

FIGURE 10.9 – Elasticités calculées sur la période de 2008 à 2015

Nous pouvons constater, sur la totalité de notre période d'étude, que le TEC 10 présente la plus grande élasticité. Cela signifie que les taux de rachats dynamiques sont très sensibles aux variations du TEC. En revanche, le spread 1 an entre le taux servi et le taux attendu présente l'élasticité la plus faible et qui est en outre très proche de 0. Les rachats dynamiques semblent être quasiment insensibles aux variations du spread 1 an entre le taux servi et le taux attendu.

Afin de rendre les élasticités plus comparables entre elles et de supprimer les éventuels effets de signes, nous avons également mesuré ces dernières en valeurs absolues. La valeur absolue de

l'élasticité permet d'avoir une idée du niveau d'élasticité. Plus ce dernier est proche de 0 plus le comportement est insensible aux variations du déterminant et inversement. La comparaison des valeurs absolues nous pousse aux mêmes conclusions.

Remarque : Nous avons évalué l'élasticité moyenne sur tous les fonds auxquels sont adossés les produits du portefeuille étudié et cela pour des spreads taux servi-taux attendu différents (0, 1 et 2 ans). Suite à cela, nous avons fait le choix de retenir le spread 1 an car ce dernier présente les élasticités les plus élevées.

Le calcul des élasticités sur période segmentée donne les valeurs suivantes :

	2008/2011		2012/2015	
	(R-TA)	TEC 10	(R-TA)	TEC 10
Elasticité	-0.042695522	-127.886425	2.343196514	- 30.84554819
Valeur absolue	0.095005753	274.3244911	10.71857654	65.45706649

FIGURE 10.10 – Elasticités calculées sur la période segmentée

Sur la période de 2008 à 2011 les rachats dynamiques montrent une plus grande sensibilité au TEC 10 qu'au spread 1 an. Ces résultats convergent avec ceux de l'étude sur les rachats dynamiques effectuée en 2012 par Generali, dont la conclusion était que la loi standard n'était pas la plus adaptée pour décrire le comportement de rachat des assurés de l'entreprise.

En ce qui concerne la période suivante, bien que le niveau d'élasticité du spread 1 an soit un peu plus élevé qu'à la période précédente, les rachats dynamiques montrent encore une fois une sensibilité plus forte aux variations du TEC 10.

Nous pouvons également nous intéresser aux signes des élasticités du spread 1 an et du TEC 10. De 2008 à 2011 ces dernières sont toutes deux de signes négatifs. Cela signifie dans le premier cas qu'une augmentation de 1% de l'écart entre le taux servi et le taux attendu entraîne une baisse des taux de rachats dynamiques. En d'autres termes, plus le taux de rendement distribué aux assurés est supérieur à celui de la concurrence, plus les taux de rachats dynamiques diminuent. Ce phénomène témoigne d'un comportement rationnel de la part des assurés car cette situation est tout à fait à leur avantage. Dans le second cas, une augmentation de 1% du TEC 10 entraîne une variation à la baisse des taux de rachats dynamiques. L'interprétation ici est moins évidente mais conforte l'hypothèse que sur cette période les assurés se fiaient plus aux mouvements des marchés financiers qu'à ceux des marchés obligataires. De 2012 à 2015, les élasticités du spread 1 an et du TEC 10 sont de signes contraires. Alors que l'explication ici est plus difficile pour le spread 1 an, elle est tout à fait imaginable pour le TEC 10. Une augmentation de 1% du TEC 10 autrement dit un regain de santé des marchés obligataires, entraîne une baisse des taux de rachats dynamiques. Ces résultats nous

confortent dans l'idée que sur la première période les assurés établissaient leurs stratégies de rachats en fonction de la santé des marchés financiers puis qu'ils se sont ensuite tournés vers les marchés obligataires suite aux différentes crises qui ont fragilisé les marchés financiers.

Conclusion :

Nous sommes conscients que l'idéal serait de pouvoir trouver une variable explicative jouant le rôle d'interrupteur qui permettrait au fil de la projection temporelle du bilan de choisir de manière dynamique entre la variance de l'EUROSTOXX 50 et le TEC 10 pour la mesure des rachats dynamiques. Bien que nous ayons étudié tout un panel de facteurs potentiels durant notre processus de choix de variables explicatives, nous n'avons à ce jour pas pu trouver une telle variable. Une autre piste étudiée est celle de la construction d'une variable macroéconomique synthétique à partir de plusieurs facteurs explicatifs. Toutefois nos tests ne nous ont pas permis d'aboutir à des résultats satisfaisants.

Suite au croisement des résultats des études de corrélations et d'élasticités, nous prenons le parti de proposer par la suite une loi de rachats dynamiques modélisée à partir du TEC 10 et calibrée sur la période de janvier 2012 à décembre 2015 afin d'estimer l'impact des rachats dynamiques au 31 décembre 2016. Le taux de rachats dynamiques estimé pour cette même année pourra a posteriori être confronté au taux de rachats dynamiques constaté grâce à l'historique de rachats 2016 de la compagnie.

11. Modèle de régression linéaire simple

Nous avons dans les paragraphes précédents, mis en évidence l'existence d'une relation linéaire entre les taux de rachats dynamiques et le TEC 10. Nous allons à présent, après un bref rappel sur le principe de la régression linéaire, construire un premier modèle à partir de notre échantillon d'observations. Nous verrons cependant que la régression linéaire simple habituelle n'est pas la méthode de modélisation paramétrique la plus indiquée pour expliquer le phénomène de rachats dynamiques à partir de la variable explicative que nous avons préalablement choisie (voir section 10.1).

11.1 Théorie

De manière générale, le modèle de régression linéaire vise à expliquer une variable réponse Y (ou variable expliquée) à partir de plusieurs covariables X_1, \dots, X_n (ou variables explicatives) souvent, à des fins de prédiction. Si l'on nomme g la fonction sous-jacente au phénomène Y observé, alors on a :

$$g \approx f(X_1, \dots, X_n)$$

Modèle :

Le modèle de régression linéaire peut être utilisé lorsque la variable réponse et les covariables sont quantitatives. On suppose alors que le lien linéaire entre ces variables se manifeste par l'équation suivante :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_n X_n + \varepsilon_n$$

La régression linéaire simple suppose que l'on ne dispose que d'une seule variable explicative que l'on notera ici X . L'échantillon observé $\{y_i, x_i\}_{i \in 1, \dots, n}$ vérifie alors l'équation suivante $\forall i \in \{1, \dots, n\}$:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$$

Nous pouvons également représenter cette équation sous forme matricielle :

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}.$$

Où β et X sont des composantes déterministes et ε (le bruit) une composante aléatoire.

Hypothèses :

On suppose que les bruits ε_i sont centrés, non-corrélés, homoscédastiques et de variance finie (hypothèses faibles).

- i. $\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$
- ii. $\forall i \neq j, \text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$
- iii. $\text{Var}[\varepsilon_i] = \sigma^2 < \infty$

Notons qu'une hypothèse forte du modèle de régression linéaire suppose de plus que les bruits ε_i sont gaussiens et indépendants.

Estimation des paramètres :

L'estimation des paramètres β_0 et β_1 du modèle peut se faire grâce à la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO) qui ne nécessite pas d'hypothèses supplémentaires sur la distribution des observations y_i ou des termes d'erreur ε_i . Cette méthode consiste à ajuster le nuage de points d'observations à l'aide d'une fonction affine minimisant la distance au carré entre chaque valeur observée et la droite d'estimation.

L'estimateur des moindres carrés ordinaires noté $\hat{\beta}$ est alors le couple $(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$, qui minimise la Somme des Carrés des Résidus (SCR) :

$$SCR = \sum_{i=1}^n (y_i - (\beta_0 + \beta_1 X_i))^2 = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$$

$$S(\beta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - (\beta_0 + \beta_1 X_i))^2 \quad \text{où} \quad \beta = (\beta_0, \beta_1)^T \in \mathbb{R}^2$$

$$\hat{\beta} = \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^2} S(\beta)$$

Proposition :

Le minimiseur $\hat{\beta}$ est un estimateur unique et sans biais de β . Il est donné par :

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$$

De plus, on a :

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

Avec :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad \overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad \text{et} \quad \bar{x}^2 = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2.$$

De plus notons que dans le cas gaussien, $\hat{\beta}$ est optimal parmi tous les estimateurs linéaires sans biais.

Le calcul de la variance de ces estimateurs et de leur covariance donne les résultats suivants :

$$\text{i. } \text{Var}[\hat{\beta}_1] = \frac{\sigma^2}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)}$$

$$\text{ii. } \text{Var}[\hat{\beta}_0] = \frac{\bar{x}^2 \sigma^2}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)}$$

$$\text{iii. } \text{Cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = -\frac{\bar{x} \sigma^2}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)}$$

Prévision :

La prévision \hat{y}_i , ou encore valeur ajustée, qui correspond à chaque observation y_i découle de la fonction de régression suivante :

$$\hat{y}_i := \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$$

Dès lors l'écart entre la valeur observée et la valeur prédite, aussi appelé résidu, se traduit comme suit :

$$\hat{\epsilon}_i = y_i - \hat{y}_i$$

Notons que les résidus $\hat{\epsilon}_i$ sont centrés et de moyenne empirique nulle. On a :

$$\mathbb{E}[\hat{\epsilon}_i] = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\epsilon}_i = 0$$

Enfin, un estimateur sans biais de la variance du bruit $\text{Var}[\varepsilon_i] = \sigma^2$, noté $\hat{\sigma}^2$ est fonction des résidus et est donné par :

$$\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2$$

Notons également que $\frac{n-2}{\sigma^2} \hat{\sigma}^2$ suit une loi $\chi^2(n-2)$ dans le cas où les résidus sont gaussiens, c'est-à-dire que $\varepsilon \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2 I)$.

11.2 Application

Nous procédons ici à l'ajustement des taux de rachats dynamiques par le modèle de régression linéaire simple et confrontons les valeurs ajustées aux valeurs observées. Si l'ajustement est pertinent, nous devrions nous attendre à ce que le nuage de points se profile tout autour de la droite d'estimation définie par l'équation $\hat{y} := \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$.

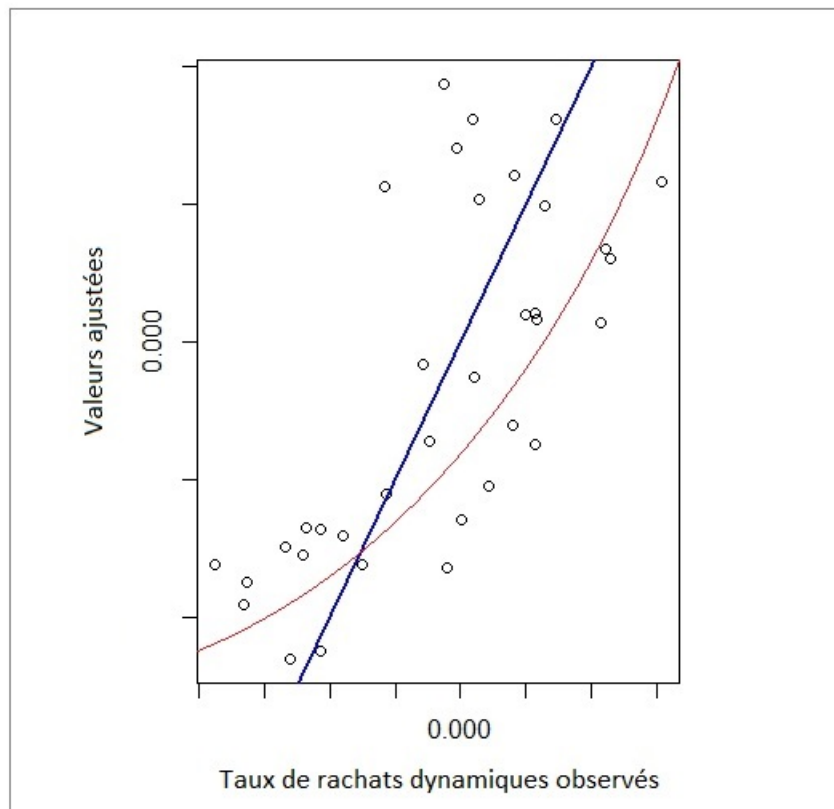


FIGURE 11.1 – Ajustement du modèle de régression linéaire simple aux taux de rachats dynamiques

Paramètres	Estimation	Statistique de Student t	p-value
β_0	-0.011053	-5.919	1.22E-06
β_1	0.027085	5.708	2.28E-06

FIGURE 11.2 – Estimation des paramètres du modèle de régression linéaire simple

Nous pouvons remarquer que le nuage de points ne suit pas tout à fait la droite de régression issue de notre modèle représentée en bleu sur le graphique ci-dessus. Ce dernier présente plutôt une structure quadratique dont la tendance est marquée par la courbe rouge. Le paramètre β_1 caractérise la pente de la droite d'estimation. Cette dernière est positive, cela signifie que notre modèle considère que les taux de rachats dynamiques sont une fonction croissante du TEC 10. Autrement dit, plus les taux de rendement des actifs de classe obligataire augmentent plus les taux de rachats dynamiques augmentent. Cette observation nous paraît contre-intuitive.

Une explication plausible serait qu'une amélioration de la santé des marchés obligataires ou encore par extrapolation, de l'économie en général, pousse les détenteurs de contrats d'assurance vie à se tourner vers des produits financiers plus risqués mais aussi plus rentables. Cela suppose en effet que le niveau de confiance des assurés dans les marchés financiers est corrélé positivement à la santé de l'économie.

Nous effectuons à présent un test de Fisher afin de tester la significativité globale du modèle. Notons que dans le cas de la régression linéaire simple, seul le paramètre β_1 est concerné de plus le test de Fisher est équivalent au test du Student (voir paragraphe 10.1).

Hypothèses :

H0 : « $\beta_0 = \dots = \beta_k = 0$ ».

H1 : « Au moins un des paramètres n'est pas égal à 0 ».

Nous considérons la statistique de test suivante sous l'hypothèse H0 :

$$F = (n - 2) \frac{R^2}{1 - R^2}$$

Où R^2 est le coefficient de détermination (cf. infra section 13.2). Cette statistique de test suit une loi de Fisher à $(1, n - 2)$ degrés de liberté (ddl). L'hypothèse H0 est rejetée si $F \leq f_{1;n-2;1-\frac{\alpha}{2}}$ ou si la p-value associée est inférieure au risque d'erreur de première espèce $\alpha = 5\%$.

Statistique de Fisher F	p-value
32.58	2.28E-06

FIGURE 11.3 – Test d'adéquation du modèle de régression linéaire simple

Conclusion :

Le modèle de régression linéaire montre quelques faiblesses notamment lors de la comparaison des valeurs ajustées aux valeurs observées. L'interprétation des paramètres du modèle n'est pas évidente mais doit se faire en tenant compte de l'environnement économique global et de la période d'étude dans son intégralité. Pour aller plus loin, nous proposons dans la section suivante de modéliser les taux de rachats dynamiques par un ajustement polynomial du modèle de régression linéaire simple.

12. Modèle de régression polynomiale

12.1 Théorie

Modèle :

Lorsque l'on constate que la modélisation s'écarte de la linéarité, l'idée naturelle est d'étendre le modèle de régression linéaire à un modèle de régression polynomiale en ajoutant des puissances successives de la variable explicative X à la fonction linéaire de base. La fonction linéaire, enrichie de plusieurs monômes, se transforme alors en une fonction polynomiale de degré p :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X^1 + \dots + \beta_p X^p + \varepsilon$$

Notons que la régression polynomiale reste dans le cadre de la régression linéaire et est de ce fait régie par les mêmes hypothèses. En pratique ce type de modélisation est fréquemment rencontré et a pour avantage d'être simple. Les coefficients $(\beta_0, \dots, \beta_p)$ peuvent, tout comme ceux de la régression linéaire simple, être estimés par la méthode des MCO (voir paragraphe 11.1).

Estimation des paramètres :

Soit n observations notées $(x_i, y_i)_{i=1, \dots, n}$ que nous cherchons à ajuster grâce au polynôme Q de degré p et d'équation :

$$Q(X) = \sum_{k=0}^p \beta_k X^k$$

Nous utilisons la méthode des MCO afin de trouver les coefficients β_k qui minimisent l'écart entre les valeurs observées y_i et les valeurs calculées à partir de la fonction polynomiale $Q(x_i)$, soit la quantité suivante :

$$E = \sum_{i=1}^n (y_i - Q(x_i))^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \sum_{k=0}^p \beta_k x_i^k)^2$$

Pour cela, nous annulons toutes les dérivées partielles de l'équation E par rapport aux coefficients β_k . On souhaite donc que $\forall k \in 0, \dots, p$:

$$\frac{\partial E}{\partial \beta_k} = 0$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{\partial E}{\partial \beta_k} &= 2 \sum_{i=1}^n -\left(y_i - \sum_{j=0}^p \beta_j x_i^j\right) x_i^k = 0 \\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^n \left(y_i - \sum_{j=0}^p \beta_j x_i^j\right) x_i^k = 0 \\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^n y_i x_i^k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^p \beta_j x_i^{j+k} \\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^n y_i x_i^k = \sum_{j=0}^p \beta_j \sum_{i=1}^n x_i^{j+k}
\end{aligned}$$

Ce qui correspond à un système de Kramer de $n + 1$ équations à $n + 1$ inconnues, qui se réécrit sous forme matricielle de la façon suivante, soit $A = MB$ avec $B = (\beta_0, \dots, \beta_p)$ les coefficients à estimer :

$$B = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_j \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} \text{ avec } B_j = \beta_j, \quad A = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i x_i^0 \\ \sum_{i=1}^n y_i x_i^1 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n y_i x_i^j \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n y_i x_i^p \end{pmatrix} \text{ avec } A_j = \sum_{i=1}^n y_i x_i^j$$

$$M = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^0 & \sum_{i=1}^n x_i^1 & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^n x_i^p \\ \sum_{i=1}^n x_i^1 & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \cdots & \sum_{i=1}^n x_i^{p+1} \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^4 & \cdots & \sum_{i=1}^n x_i^{p+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_i^p & \sum_{i=1}^n x_i^{p+1} & \sum_{i=1}^n x_i^{p+2} & \cdots & \sum_{i=1}^n x_i^{2p} \end{pmatrix} \quad M_{kl} = M_{lk} = \sum_{i=1}^n x_i^{k+l}$$

La solution s'obtient en inversant la matrice M , on a : $B = M^{-1}A$. On peut alors calculer la prévision \hat{y}_i à partir de la fonction de régression polynomiale suivante :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \hat{y}_i := \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i^1 + \dots + \hat{\beta}_p x_i^p$$

12.2 Application

Nous allons dans cette section ajuster les taux de rachats dynamiques par le modèle de régression polynomiale et confronter les valeurs ajustées aux valeurs observées.

Avant de se lancer dans la modélisation nous effectuons une régression locale pondérée, aussi connue sous le nom de courbe de Lowess¹⁰, pour avoir une idée de la forme de la relation entre les rachats dynamiques et du TEC 10. L'idée de cette méthode est d'utiliser un modèle de régression linéaire (pondéré) uniquement au voisinage du point d'intérêt x_i .

Nous avons ensuite testé plusieurs modèles et avons retenu celui qui présentait la meilleure adéquation conformément aux tests statistiques effectués plus bas (voir section 13). De plus, étant donné que la méthode des MCO a tendance à favoriser le modèle de plus haut degré, nous avons complété notre analyse par l'évaluation du critère C_p de Mallows afin de préselectionner notre modèle de régression polynomiale.

Le C_p de Mallows est défini par :

$$C_p = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\widehat{\sigma^2}} - (n - 2p)$$

Le C_p de Mallows compare la précision et le biais du modèle complet à ceux de modèles composés d'un sous-ensemble de variables explicatives. En général, on recherche les modèles où ce critère est faible et proche du nombre de prédicteurs du modèle p . Un C_p de Mallows faible et proche de p indique une bonne adéquation du modèle aux données observées. Le modèle a alors une faible variance et est relativement précis dans l'estimation des coefficients de régression mais aussi en terme de prévision. Une valeur du C_p de Mallows supérieure à p témoigne d'une mauvaise adéquation du modèle et de la présence d'un biais non négligeable.

	p	C_p
Polynôme de degré 2	2	2.3
Polynôme de degré 3	3	4.0

FIGURE 12.1 – Évaluation du critère de Mallows

Étant donné que l'augmentation du nombre de degrés du polynôme et de variable explicatives affecte la robustesse du modèle et fait croître le nombre d'artefacts, nous décidons de retenir comme modèle le polynôme de degré le plus faible qui représente au mieux nos données et qui vérifie le critère C_p de Mallows. Ainsi, nous avons choisi un modèle quadratique d'équation : $Y = \beta_0 + \beta_1 X^1 + \beta_2 X^2 + \varepsilon$, où ε est le terme d'erreur du modèle.

10. Cleveland W, 1979; Cleveland W et al., 1988.

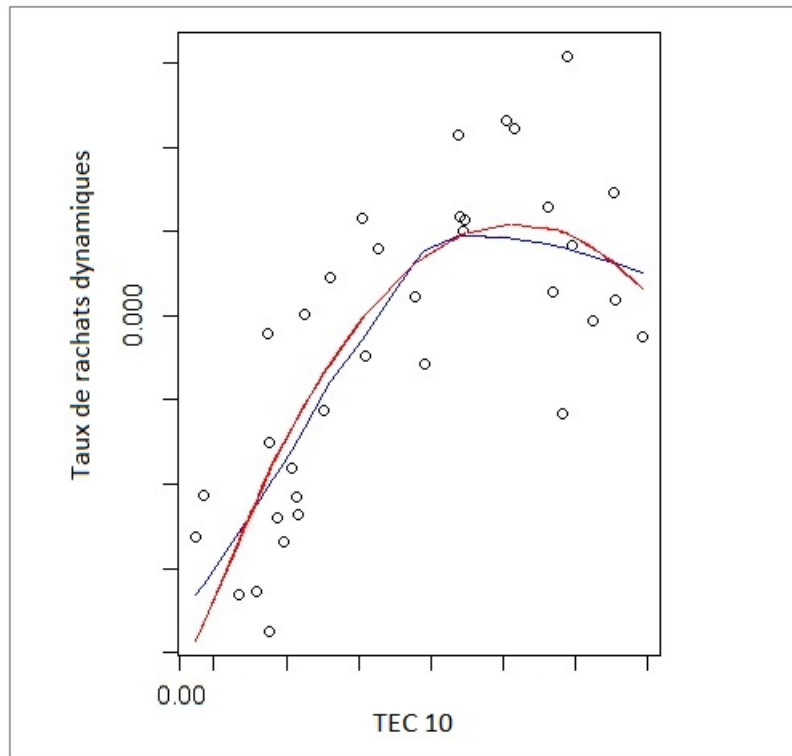


FIGURE 12.2 – Ajustement du modèle de régression polynomiale aux taux de rachats dynamiques

Paramètres	Estimation	Statistique de Student t	p-value
β_0	-0.040453	-5.021	1.87E-05
β_1	0.185872	4.337	1.35E-04
β_2	-0.202435	-3.722	7.60E-04

FIGURE 12.3 – Estimation des paramètres du modèle de régression polynomiale

Le graphique ci-dessus représente la fonction d’ajustement polynomial aux taux de rachats dynamiques en rouge ainsi que la courbe de Lowess en bleu. Nous observons graphiquement que cette nouvelle modélisation semble plus correspondre à la dynamique des rachats conjoncturels. Notons une fois encore que l’interprétation économique des coefficients du modèle reste difficile.

Nous nous devons à présent de vérifier la validité de nos deux modèles et de déterminer la qualité de ces derniers en tant que prédicteurs. La section suivante présente différents critères qui pourront nous aider dans le choix du modèle définitif.

13. Choix du modèle

13.1 Analyse des résidus

Dans cette section nous nous intéressons particulièrement aux résidus des modèles de régression. L'analyse des résidus permet de tester la validité d'un modèle et de déceler certaines de ses faiblesses. Nous observons dans un premier temps les résidus issus des nos deux modèles en fonction des valeurs ajustées. Il s'agit ici de vérifier que les résidus ne présentent aucune structure particulière car si tel est le cas, cela voudrait dire qu'ils contiennent encore de l'information non expliquée et de ce fait cela invaliderait le modèle dont ils proviennent.

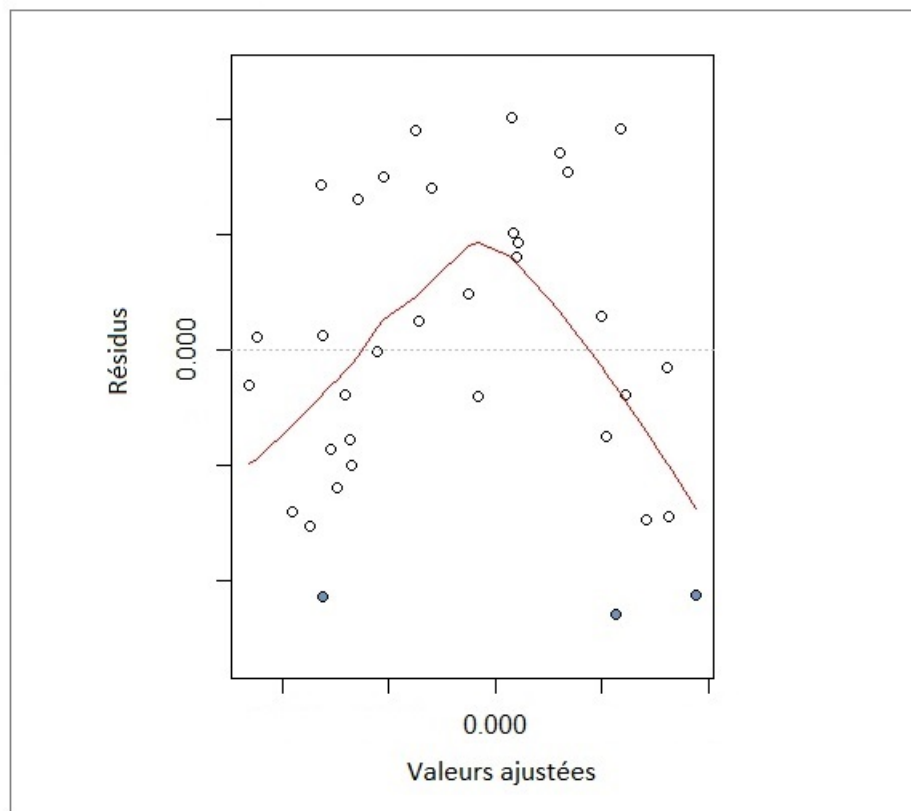


FIGURE 13.1 – Résidus du modèle de régression linéaire

Nous pouvons distinguer, dans le cas de la régression linéaire simple, que les résidus présentent une tendance quadratique. En effet, lorsque nous observons de plus près la tendance des résidus

(courbe représentée en rouge) nous avons l'impression qu'une parabole se dessine. Cela veut donc dire que les résidus contiennent encore de l'information et que ce modèle n'est pas le plus indiqué pour modéliser les rachats dynamiques. De plus, nous pouvons remarquer la présence de quelques points aberrants représentés en bleu sur le graphique.

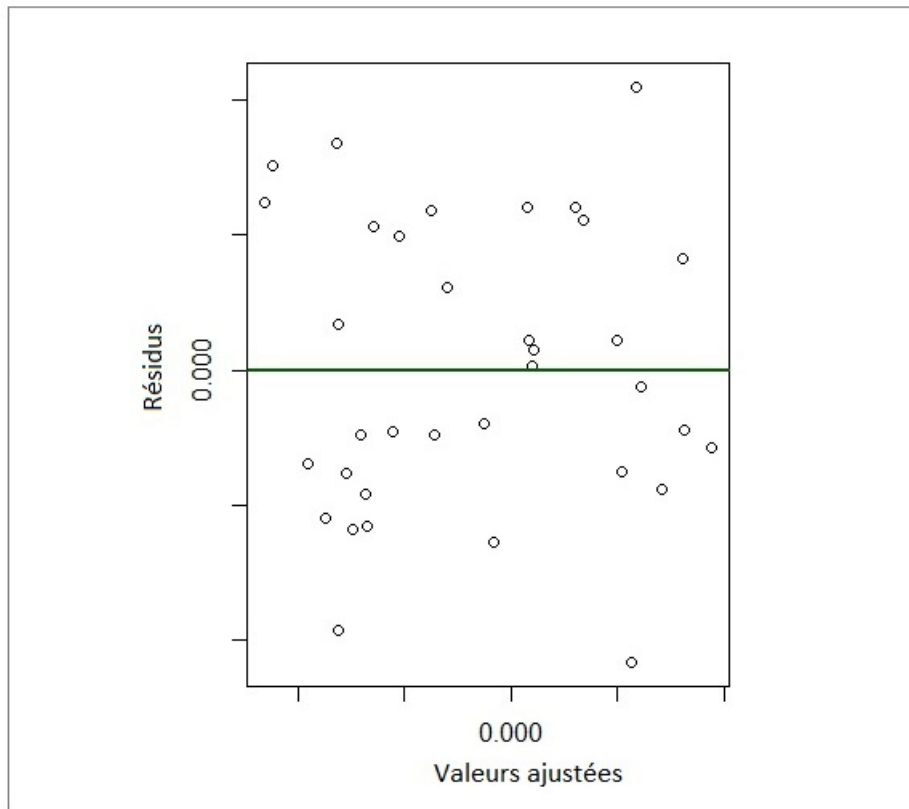


FIGURE 13.2 – Résidus du modèle de régression polynomiale

A contrario, les résidus issus du modèle de régression polynomiale ne présentent aucune structure particulière. Cela pousse à supposer que ce modèle explique assez bien la dispersion des taux de rachats dynamiques.

Nous testons à présent l'hypothèse de normalité des résidus. Cette hypothèse sur les termes d'erreur est une hypothèse forte du modèle linéaire qui permet d'obtenir certaines propriétés intéressantes. Toutefois cette dernière n'est pas obligatoire et ne représente donc pas un facteur bloquant pour la modélisation. Cependant elle peut signifier, lorsqu'elle est vérifiée, que les conditions d'application du modèle sont suffisamment respectées.

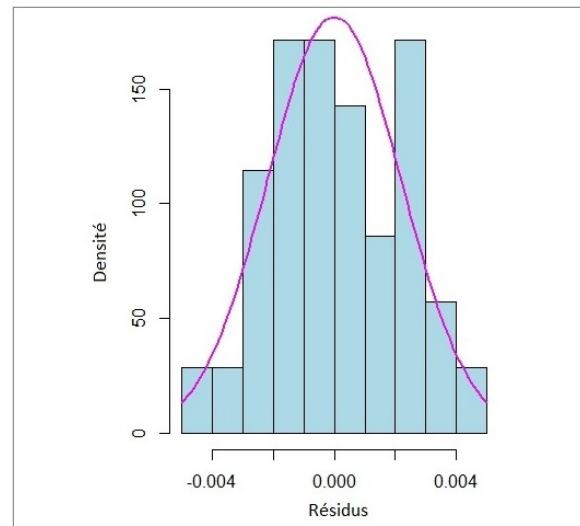
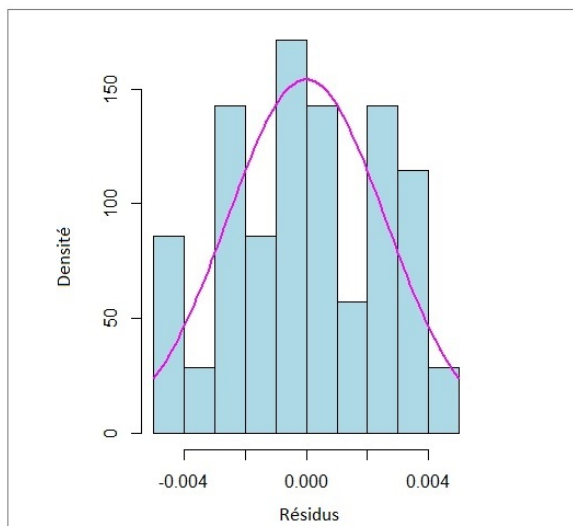
Notons également que le non-respect des autres hypothèses du modèle ne représente pas non plus un facteur bloquant pour la modélisation. Cela signifie simplement que les estimateurs des paramètres

pourraient contenir un biais et/ou ne pas être efficaces (autrement dit à variance non minimale). Il faut dans ce cas en tenir compte lors de l'analyse et l'interprétation des résultats obtenus et des prédictions faites à partir du modèle retenu.

Nous proposons ci-dessous deux méthodes graphiques et un test statistique afin de vérifier l'adéquation des résidus à la loi normale^[23].

Histogramme des résidus

L'histogramme des résidus est une méthode graphique qui permet de visualiser la forme de la densité de la variable étudiée et de déterminer par comparaison avec celles des lois usuelles, la loi sous-jacente de cette même variable. Il s'agit ici d'essayer de voir si l'on peut retrouver une densité en forme de cloche qui est caractéristique d'une loi gaussienne.



(a) Histogramme des résidus du modèle de régression linéaire simple (b) Histogramme des résidus du modèle de régression polynomiale

Visuellement aucune des distributions des deux jeux de résidus ne semblent gaussiennes. Nous pouvons cependant avoir un doute sur la nature de la distribution des résidus issus de la régression polynomiale qui se rapproche d'une distribution normale mais avec un coefficient d'asymétrie (Skewness) légèrement positif.

Normal QQ-plot

La méthode *Quantile - Quantile plot* (ou QQ-plot) est un outil graphique statistique qui permet de comparer les distributions de deux jeux de données. Habituellement, le graphique sert à comparer

un échantillon observé avec un échantillon théorique généré à partir d'une loi de probabilité servant de référentiel. Nous utilisons ici la loi normale comme distribution de référence. Si les données observées sont compatibles avec l'échantillon théoriques, alors le nuage de points devrait s'aligner sur la première bissectrice que l'on appelle aussi droite d'Henry.

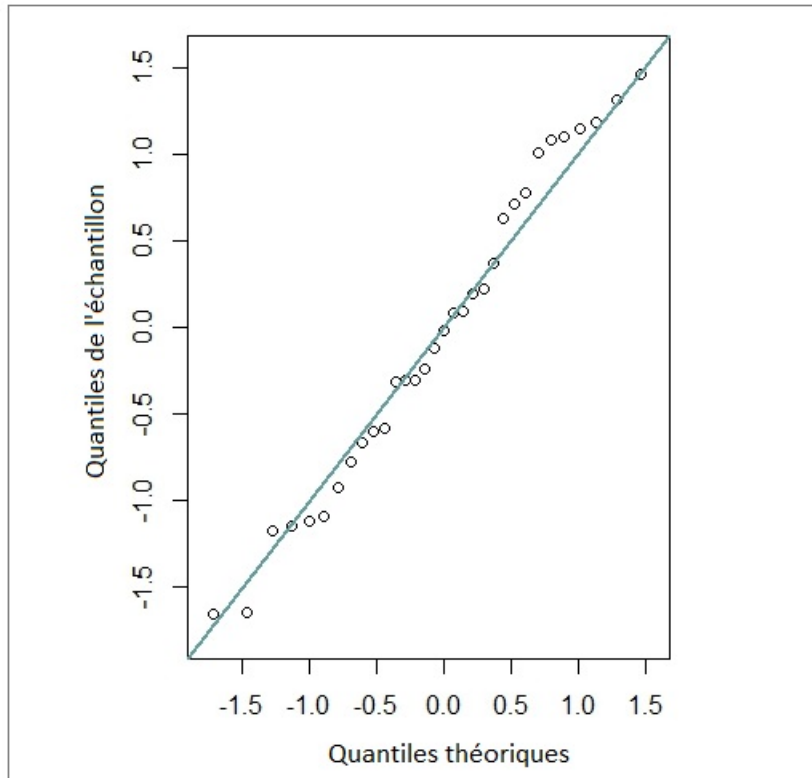


FIGURE 13.4 – QQ-plot du modèle de régression linéaire

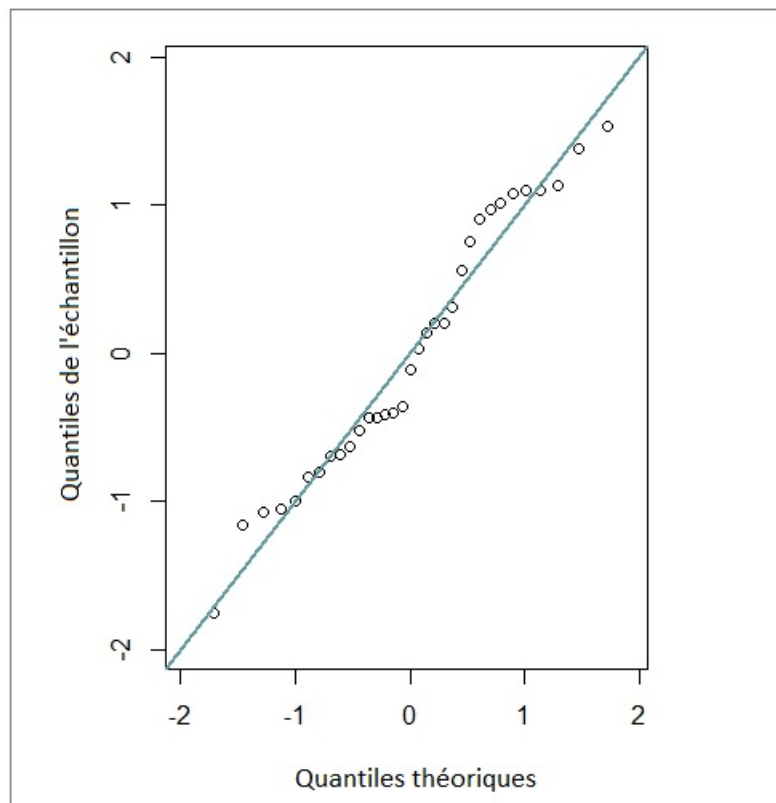


FIGURE 13.5 – QQ-plot du modèle de régression polynomiale

Les deux graphiques nous montrent que les résidus de nos deux modèles sont relativement alignés sur la droite d'Henry. Bien qu'ils oscillent autour d'elle, nous ne remarquons pas d'écarts significatifs ni d'artefacts ou de valeurs extrêmes. Nous allons à présent tester statistiquement l'adéquation des deux jeux de résidus à la loi normale afin de quantifier notre analyse et d'être fixé sur la nature de leurs distributions respectives.

Test de Shapiro-Wilk

Le test de Shapiro-Wilk permet de vérifier l'adéquation d'un échantillon à la loi normale. Ce dernier est largement employé et présente la particularité d'être puissant lorsqu'ils s'agit d'étudier de petits effectifs ($n \leq 50$).

Soient n variables aléatoires observées (X_1, \dots, X_n) .

Hypothèses :

H_0 : « L'échantillon est gaussien ».

H_1 : « L'échantillon n'est pas gaussien ».

Nous considérons la statistique de test W sous l'hypothèse H_0 :

$$W = \frac{\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_i (x_{(n-i+1)} - x_{(i)})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Avec :

- $x_{(i)}$ la série de données triée ;
- $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ la partie entière de $\frac{n}{2}$;
- a_i constantes générées à partir de la moyenne et de la matrice de variance-covariance des quantiles d'un échantillon de taille n suivant une loi normale.

Nous rejetons l'hypothèse H_0 si la p-value associée au test de Shapiro-Wilk est inférieure au risque d'erreur de première espèce $\alpha = 5\%$.

	Statistique de Shapiro-Wilk	p-value
Régression linéaire	0.95582	0.1709
Régression polynomiale	0.9691	0.4189

FIGURE 13.6 – Application : test de Shapiro-Wilk

Dans les deux cas les p-values sont supérieures à $\alpha = 5\%$, l'hypothèse H_0 selon laquelle les résidus sont gaussiens ne peut donc être rejetée.

Conclusion :

Que ce soit dans le cas de la régression linéaire simple ou bien dans celui de l'ajustement polynomial, l'hypothèse de normalité des résidus est acceptée au seuil de signification α fixé. Toutefois n'oublions pas que notre étude porte sur un nombre restreint de données et qu'il reste tout à fait probable que si nous disposions d'un nombre plus élevé d'observations, la loi sous-jacente des résidus pourraient s'avérer être tout autre. Notons que les tests de significativité des paramètres estimés du modèle restent asymptotiquement valides dans le cas non gaussien.

Par ailleurs, la confrontation des résidus aux valeurs ajustées permet, dans le cas de la régression polynomiale, de supposer que les hypothèses faibles du modèle sont suffisamment respectées. Cette observation est moins évidente dans le cas du modèle linéaire simple. Nous prendrons donc en compte cette observation lors de notre décision quant au modèle à retenir.

13.2 Le coefficient de détermination

Le coefficient de détermination (noté R^2) est un indicateur qui permet de quantifier la qualité de l'ajustement du modèle de régression aux données. Compris entre 0 et 1, il représente la proportion d'observations y_i qui s'explique par la présence de la variable explicative X . Lorsqu'il est égal à 1 cet indicateur témoigne d'un ajustement parfait du modèle de régression aux données d'observation c'est-à-dire que pour tout i , $\hat{y}_i = y_i$. A contrario, lorsque ce dernier vaut 0, cela signifie que le modèle utilisé n'est pas adapté aux données et que les variables Y et X ne sont pas linéairement liées.

Le R^2 correspond au ratio entre la variation expliquée par le modèle et la variation totale des données d'observation. Ainsi il s'exprime de la manière suivante :

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT}$$

Où :

- $SCE = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2$ est la variance de la régression.
- $SCT = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$ est la variance totale..

Notons en particulier la relation suivante :

$$SCT = SCE + SCR \quad \text{avec} \quad SCR = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \text{ la variance résiduelle.}$$

Le coefficient de détermination peut alors s'écrire :

$$R^2 = 1 - \frac{SCR}{SCT}$$

La valeur du coefficient de détermination a tendance à croître avec le nombre de variables explicatives retenues même si celles-ci sont peu corrélées avec la variable expliquée. Or en général un nombre élevé de variables explicatives fragilise la robustesse d'un modèle. Par conséquent, nous calculons également le R^2 ajusté qui permet de pénaliser les modèles étudiés selon le nombre de variables explicatives qu'ils contiennent. Ainsi ces derniers seront plus comparables entre eux et nous aurons une meilleure évaluation de la qualité de leur ajustement.

Le R^2 ajusté est donné par :

$$R^2 \text{ ajusté} = R^2 - \frac{k(1 - R^2)}{(n - k - 1)}$$

Où k correspond au nombre de variables explicatives du modèle et n le nombre d'observations.

	Coefficients de détermination	
	R^2	R^2 ajusté
Régression linéaire	49.68%	48.15%
Régression polynomiale	64.88%	62.68%

FIGURE 13.7 – Application : calcul des coefficients de détermination

Dans le cas de la régression linéaire simple nous pouvons constater que 48.15% de la dispersion des données est expliquée par le modèle. L'ajustement par régression polynomiale donne quant à lui de meilleurs résultats avec 62.68% de la dispersion des données expliquée.

Nous émettons ici une critique par rapport à l'utilisation de ce critère pour le choix du modèle à retenir. Le R^2 ne prend pas en compte la possibilité d'un sur-ajustement du modèle aux données. Nous garderons donc à l'esprit cette remarque lors du choix final de notre modèle.

13.3 Akaike Information Criterion (AIC)

Le nombre de données avec lequel nous travaillons ne nous permet pas d'employer les méthodes de scoring habituelles pour pouvoir comparer nos deux modèles. Nous nous tournons donc vers un autre outil d'évaluation qui permet contourner cette contrainte.

Nous utilisons le Critère d'Information d' Akaike (AIC) afin de pouvoir mesurer la bonne adéquation aux données de nos modèles et de pouvoir comparer ces derniers entre eux. Il permet de pénaliser les modèles en fonction du nombre de paramètres afin de satisfaire le critère de parcimonie. De plus, ce critère peut également être employé lorsque les résidus ne vérifient pas l'hypothèse de normalité. Notons que le modèle à retenir est celui qui présente le critère AIC le plus faible.

Avant d'exprimer l'AIC sous sa forme mathématique, nous devons tout d'abord introduire la notion de vraisemblance.

Soit un n-échantillon (X_1, \dots, X_n) de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{L}(\theta)$.

Pour tout événement $E(x_1, \dots, x_n)$, on a :

$$E(x_1, \dots, x_n) = \{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\} = \{X_1 = x_1\} \cap \dots \cap \{X_n = x_n\}$$

La fonction de probabilité associée à l'événement $E(x_1, \dots, x_n)$ sous l'hypothèse d'indépendance des variables aléatoires X_i est donnée par :

$$L(\theta) = \mathbb{P}_\theta(E(x_1, \dots, x_n)) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_\theta(\{X_i = x_i\})$$

L'application $L_n : (x_1, \dots, x_n; \theta) \mapsto L_n(x_1, \dots, x_n; \theta)$ ou encore $L(\theta)$, s'appelle la vraisemblance. Cette dernière décrit l'adéquation entre la distribution de l'échantillon de variables aléatoires observé et de la véritable loi de probabilité présumée, sous-jacente à la population dont est issu ce même échantillon.

Le critère AIC s'exprime en fonction de la log-vraisemblance, ainsi ce dernier s'écrit de la manière suivante :

$$AIC = -2\ln(L(\theta)) + 2k$$

Où k est le nombre de paramètres du modèle.

	Critère AIC
Régression linéaire	-313.75
Régression polynomiale	-324.33

FIGURE 13.8 – Application : calcul des critères AIC

Le critère AIC du modèle de régression polynomiale est plus petit que celui du modèle de régression linéaire simple.

Conclusion :

L'analyse des résidus nous a permis de valider et/ou d'invalider les hypothèses de nos deux modèles de régression. L'ajustement polynomial semble au moins vérifier les hypothèses faibles du modèle alors que cette observation est moins évidente dans le cas de la régression linéaire simple. En outre les mesures d'adéquation des modèles aux données observées penchent plus en faveur du modèle de régression polynomiale. Les différents critères et résultats étudiés dans leur ensemble nous poussent à retenir l'ajustement polynomial et à rejeter le modèle de régression linéaire.

Nous proposons dans la suite de ce mémoire une implémentation des rachats dynamiques suivant le modèle de régression polynomiale retenu. À cette occasion, nous verrons que certains ajustements seront nécessaires afin de rester en concordance avec les exigences du superviseur et de la réglementation en vigueur. Enfin pour conclure, nous évaluerons l'impact financier de notre loi de rachats dynamiques sur le résultat de l'entreprise.

14. Impacts financiers des rachats dynamiques

14.1 Le progiciel Prophet

Prophet est une plateforme de modélisation actuarielle développée par Sungard. Le progiciel prends en entrée différentes hypothèses d'ordre économique global mais aussi plus spécifiques à l'activité et au portefeuille de l'entreprise (Model Points, tables d'hypothèses économiques,...) et permet aux compagnies de projeter leur compte de résultat dans le temps. Ainsi dans le cas d'une compagnie d'assurance, il peut par exemple être utilisé afin : de valoriser un portefeuille à travers le calcul de l'Embedded Value (EV), de mesurer la rentabilité et de tarifer les produits d'assurance ou encore d'évaluer le Capital Économique de la compagnie.

En pratique Prophet utilise deux catégories principales de librairies. La première catégorie de librairies est consacrée à la définition des éléments constituant le passif de l'entreprise. La deuxième connue sous le nom de librairie ALS (Asset and Liability Strategy) permet quant à elle de modéliser les actifs et les interactions actif-passif du portefeuille de la compagnie. Notons que bien qu'il y ait un socle commun, la définition des éléments de ces librairies peut varier d'une compagnie à une autre mais aussi d'un pays à un autre.

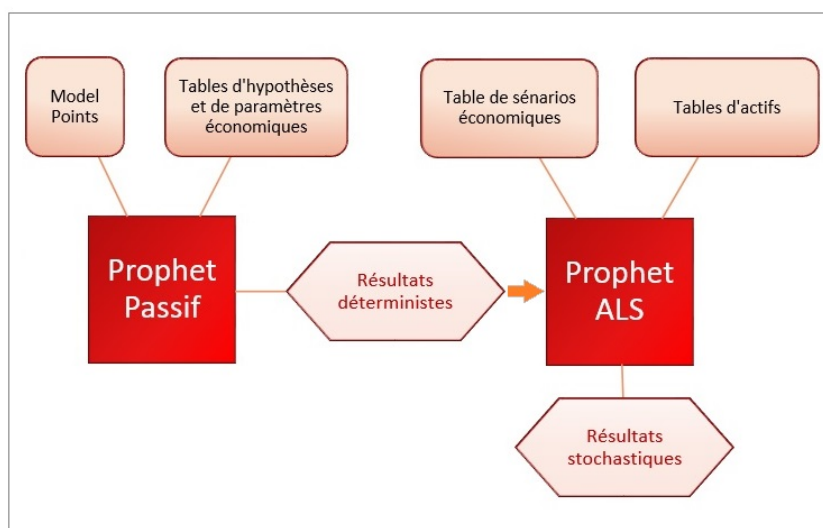


FIGURE 14.1 – Schéma synthétique : fonctionnement de Prophet suivant une approche de type flexing

14.2 Indicateurs financiers

Dans cette section nous nous plaçons dans le cadre de la norme MCEV et nous intéressons aux éléments du bilan qui vont nous permettre de mesurer l'impact financier de notre loi de rachats dynamiques sur le passif de la compagnie.

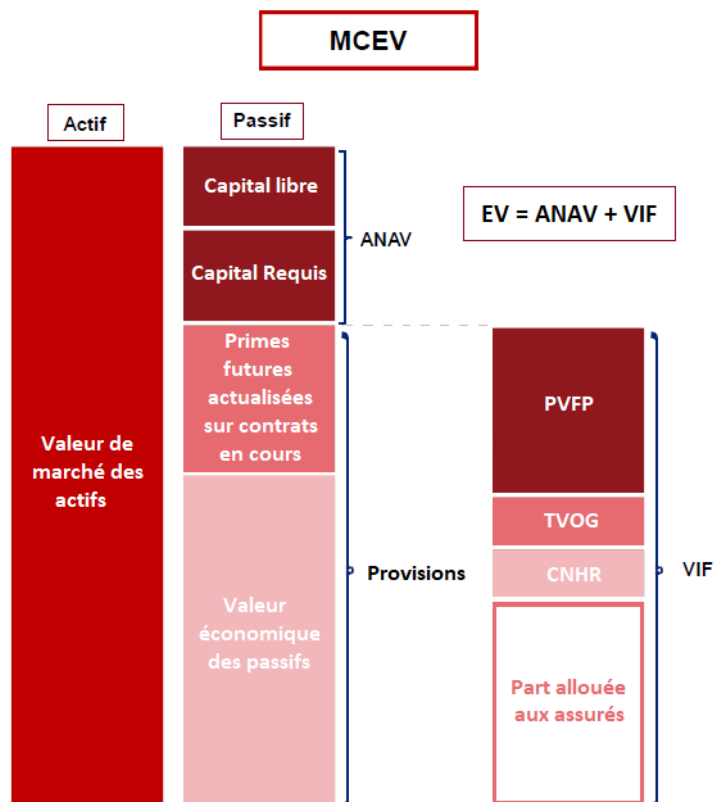


FIGURE 14.2 – Bilan MCEV sous Solvabilité 2

Nous nous intéressons en particulier à la Value of In Force (VIF) qui représente la valeur du portefeuille de l'entreprise. Cette composante du passif se décompose en quatre éléments :

- **La Present Value of Future Profits (PVFP)** : la valeur présente des profits futurs.
- **La Time Value of Options and Guarantees (TVOG)** : le coût des options et garanties.
- **Le Cost of Non-Hedgeable Risk (CNHR)** : le coût des risques non couvrables.
- **Le Cost of holding Required Capital (CReC)** : le coût d'immobilisation du capital (coût frictionnel).

$$VIF = PVFP - TVOG - CNHR - CReC$$

En particulier, on a la décomposition suivante :

$$VIF = PVFP - (TVOG + Rachats Dynamiques) - CNHR - CReC$$

Les rachats dynamiques ne sont pas directement inclus dans le calcul de la TVOG, ils sont mesurés à part, cela afin que cette dernière ne reflète que la partie liée à l'asymétrie des contrats. Cette décomposition permet également en fonction de la loi de rachats dynamiques utilisée, de mieux tenir compte de la volatilité des actifs.

Les deux premiers éléments de la VIF sont les indicateurs financiers clés que nous évaluerons par la suite afin de quantifier l'impact de notre loi.

Present Value of Future Profits

La Present Value of Future Profits (PVFP) représente la valeur actuelle des profits ou pertes futures nets d'impôts générés par le portefeuille de contrats d'une compagnie. Elle correspond à la valeur des résultats futurs actualisés. Soit R_k le résultat de l'année k sur le portefeuille observé pour un horizon n donné et i le taux d'actualisation, la PVFP correspond alors à :

$$PVFP = \sum_{k=1}^n \frac{R_k}{(1+i)^k}$$

On distingue en particulier la PVFP dite déterministe issue du scénario central (en Certainty Equivalent) et la PVFP stochastique qui correspond à la moyenne des PVFP obtenues à partir des 1000 scénarios économiques.

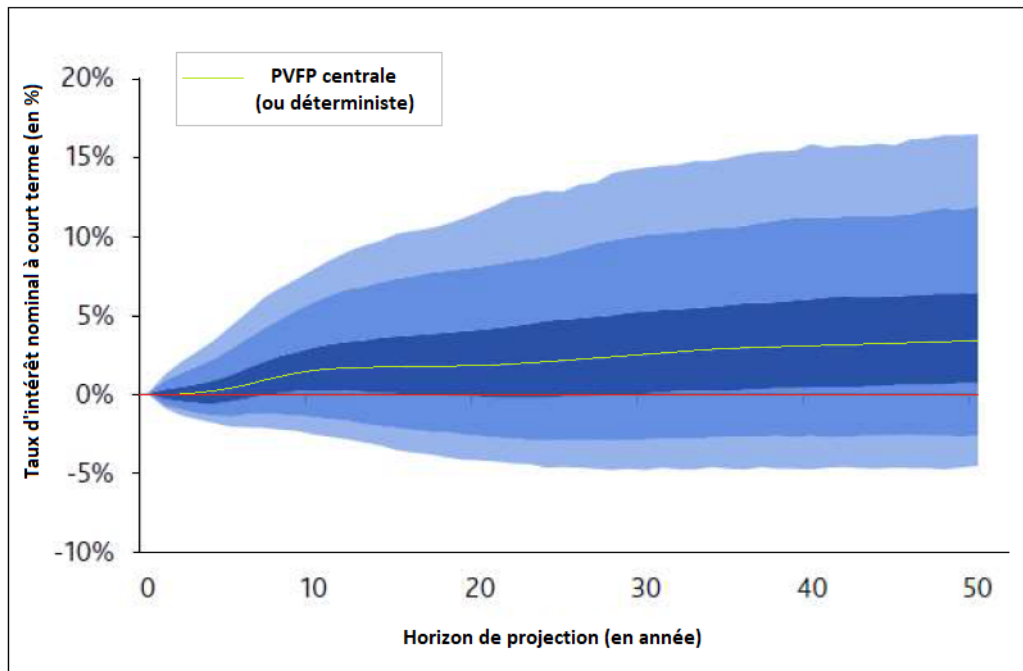


FIGURE 14.3 – Exemple de trajectoires des 1000 scénarios économiques

Time Value of Options and Guarantees

La valeur temps des option et garanties correspond à la différence entre la PVFP déterministe intégrant la valeur intrinsèque des options et garanties et la PVFP moyenne obtenue à partir des scénarios stochastiques. Elle permet de capturer l'asymétrie des options et garanties.

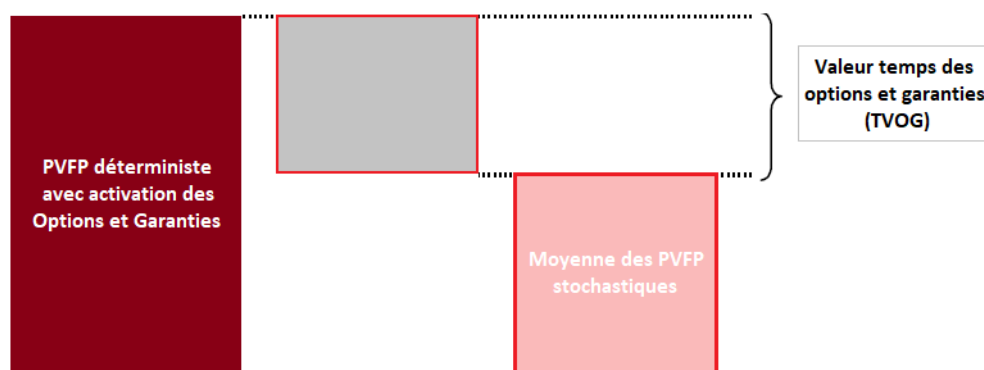


FIGURE 14.4 – Calcul de la Time Value of Options and Guarantees

14.3 Résultats de la modélisation

Nous projetons notre portefeuille sur un horizon de 60 ans à l'aide du modèle ALS de l'entreprise. Dans le but de modéliser notre loi de rachats dynamiques, nous devons disposer de la projection temporelle du TEC 10. Or ce dernier n'est pas directement disponible à partir de nos tables de scénarios économiques. Nous effectuons donc un proxy établi à partir du TME modélisé. Notons que cette approximation a déjà été validée par le superviseur notamment lors de précédentes études réalisées en interne, nous sommes donc confiants quant à son utilisation.

La loi de rachats dynamiques

La construction d'une loi de rachats dynamiques est régie par de nombreuses contraintes réglementaires et opérationnelles. Outre les règles dictées par la réglementation Solvabilité 2, les compagnies d'assurance doivent également prendre en compte différents paramètres tels que le temps d'exécution, les niveaux de granularité des modèles passif et ALM ou encore la projection temporelle des variables explicatives de la loi de rachats dynamiques et sa validité.

Par prudence, nous décidons d'implémenter une loi de rachats dynamiques avec un floor à 0. Autrement dit nous imposons une borne inférieure de 0 qui empêche les rachats dynamiques de faire diminuer les rachats structurels. De plus, tout comme cela a été déterminé dans l'étude QIS5¹¹, nous imposons une borne supérieure égale à k fois le maximum des rachats globaux historiques. Outre le fait d'indiquer la proportion maximale d'assurés influencés par la variable macroéconomique retenue, cette dernière borne est nécessaire car elle empêche les rachats dynamiques d'évoluer au-delà du nombre de polices présents dans le portefeuille de la compagnie. Le formalisme mathématique de la loi est donné par l'expression suivante :

$$\text{Min}(RD_{max}, \text{Max}(RD_{min}, \alpha \times TEC10^2 + \beta \times TEC10 + \gamma))$$

Avec :

- RD_{max} : le taux de rachats dynamiques maximum à partir duquel ces derniers sont constants.
- RD_{min} : le taux de rachats dynamiques minimum observable.
- Les constantes α , β et γ sont les paramètres estimés issus du modèle de régression polynomiale.

11. Cf. *Les rachats dynamiques : Comportement des assurés en période de crise, nouvelle modélisation et impact financier pour l'assureur*, Xavier Brugirard, 2012, p.80.

Résultats

Avant de s'intéresser aux impacts financiers, nous pouvons dans un premier temps regarder les effets des différentes lois de rachats dynamiques implémentées sur l'engagement de la compagnie. Le tableau ci-dessous regroupe les BEL obtenus en relatifs par rapport à celui de la loi actuelle. Notons que la loi Generali 2012 est en fait la loi standard calibrée sur le portefeuille de l'entreprise. De plus, nous avons appelé notre loi de rachats dynamiques « Loi TEC 10 ».

	Loi QIS _{Min}	Loi QIS _{Max}	Loi Generali 2012	Loi TEC 10
BEL	1.26%	0.61%	-1.36%	-0.56%

FIGURE 14.5 – Calcul des BEL des lois de rachats dynamiques

De manière générale, la présence d'une loi de rachats dynamiques dans le modèle a pour effet d'augmenter le BEL, ce qui rejoint les résultats de l'étude de l'ACPR de 2013 (voir section 2.3.3). Les lois QIS_{Min} et QIS_{Max} , qui nous le rappelons ont été construites à partir des portefeuilles de différentes compagnies d'assurance européennes, ont tendance à faire augmenter les engagements de l'entreprise. A contrario, les lois Generali 2012 et TEC 10 font quant à elles diminuer ces derniers. Les lois de rachats dynamiques ayant un effet sur le BEL, il est donc important d'utiliser une loi qui reflète au mieux l'évolution de ces derniers afin d'évaluer au plus juste le passif de l'entreprise.

Nous observons à présent les résultats en relatif par rapport à la loi de rachats dynamiques actuellement utilisée dans l'entreprise en terme de PVFP et de TVOG, obtenus suite à l'implémentation de notre loi de rachats dynamiques.

	Loi QIS _{Min}	Loi QIS _{Max}	Loi Generali 2012	Loi TEC 10
PVFP nette	-24.48%	-37.26%	-9.95%	1.49%
TVOG	125.83%	167.72%	39.74%	526.82%

FIGURE 14.6 – Calcul d'impacts financiers de la nouvelle loi de rachats dynamiques

Les PVFP des lois QIS et Generali 2012 génèrent moins de profits que la loi actuelle alors que la loi TEC 10 en engendre légèrement plus. Par ailleurs, toutes les lois implémentées semblent coûter plus cher à l'entreprise que la loi actuelle. Nous pouvons également remarquer que la TVOG de la loi actuelle est beaucoup plus élevée que celles des autres lois. Cela signifie que notre loi est la plus pénalisante.

Sensibilité

Nous proposons à présent de supprimer le floor fixé à 0 et autorisons notre loi à prendre des valeurs négatives avec comme nouveau seuil minimum $RD_{min} = -1\%$. En d'autres termes, la loi TEC 10 peut

maintenant faire diminuer les rachats structurels. Cette sensibilité sur la loi TEC 10 a pour effet de faire baisser le BEL de -0.12% par rapport à celui de notre loi initiale. Cela signifie que la baisse des rachats entraîne une diminution des engagements de l'entreprise. Le tableau ci-dessous nous montre les impacts en PVFP et TVOG de la sensibilité par rapport à la loi actuelle.

	Loi TEC 10	Sensibilité
PVFP nette	1.49%	4.17%
TVOG	526.82%	-40.56%

FIGURE 14.7 – Impacts financiers de la sensibilité sur la loi TEC 10

Alors que la loi TEC 10 pénalise lourdement la compagnie, la sensibilité est quant à elle moins sévère que la loi actuelle en ce qui concerne la TVOG. En effet celle-ci est 40.56% plus faible que la TVOG de la loi actuelle. De plus, la PVFP est encore une fois supérieure à cette dernière. Nous pouvons à présent comparer les courbes de profits de la loi actuelle et de la sensibilité.

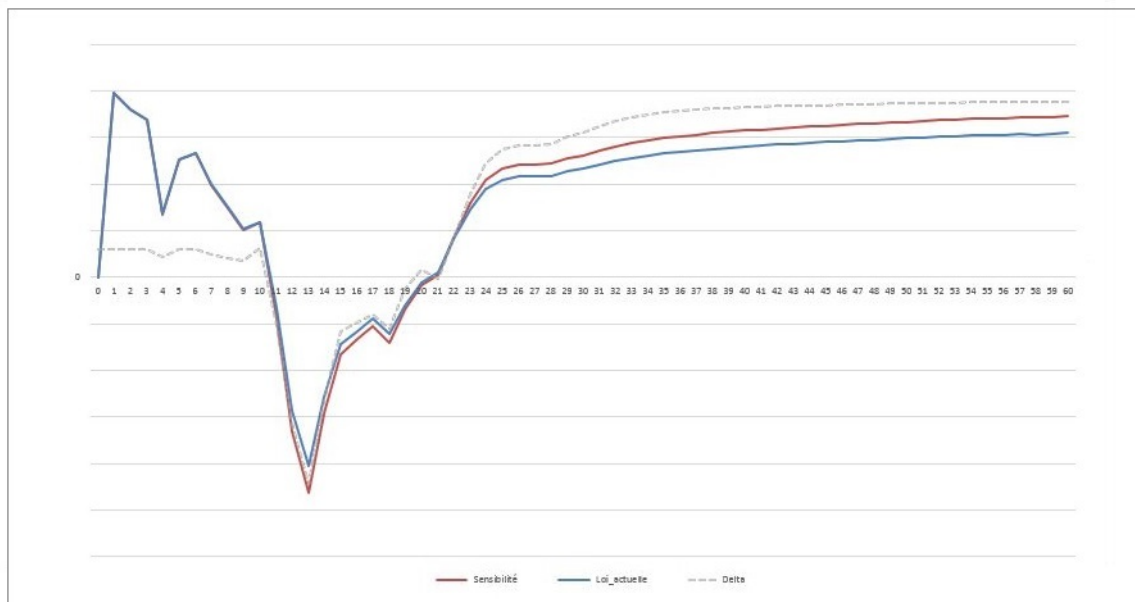


FIGURE 14.8 – Comparaison des profits de la loi actuelle et de la sensibilité

Les profits associés à la sensibilité suivent globalement la même trajectoire que celle de la loi actuelle. Les deux lois de rachats dynamiques semblent générer quasiment les mêmes montants de profits dans les 10 premières années de projection. Nous pouvons remarquer quelques perturbations entre la 11^{ème} et la 22^{ème} année où la sensibilité semble augmenter un peu plus les pertes subies par l'entreprise. C'est à partir de la 23^{ème} année de projection que l'écart de profit se creuse entre les deux lois et cela en faveur de la sensibilité. Cet écart s'explique par le fait que cette dernière permet des taux de rachats négatifs qui sont plus nombreux en fin de projection, alors que la loi actuelle prend des valeurs nulles. Ces résultats sont directement liés à l'évolution de notre variable explicative.

Conclusion :

À niveau de PVFP quasiment égal, notre loi de rachats dynamiques semble se déclencher plus fréquemment entraînant ainsi une augmentation du coût des options et garanties. Comparée aux lois ONC, la loi que nous avons implémentée est la plus pénalisante pour la compagnie mais elle est également la plus prudente.

15. Limites de notre étude

Nous pouvons à présent nous intéresser aux limites de notre étude qui nous le rappelons a été réalisée sous contraintes. Soulignons ici que cette dernière répond à un besoin spécifique de l'entreprise et notamment que la loi de rachats dynamiques construite ne peut être utilisée telle quelle et a donc vocation à être améliorée.

Une question principale se soulève quant à notre choix de modélisation. Celle-ci prend en compte le niveau des taux d'intérêt à un instant donné mais pas le taux servi par l'assureur ou la concurrence ni le niveau de richesse de l'assureur, paramètres qui habituellement accompagnent une évolution des taux d'intérêt. En effet, le modèle se comporte de la même manière avec des taux à 4% après une baisse violente des taux d'intérêt sur plusieurs périodes successives qu'après une hausse brutale de ces derniers. Or avec les règles et pratiques actuelles, nous savons que les niveaux de taux de rachats réels sont très différents dans ces deux cas de figure. Toutefois, l'étude permet non seulement de mesurer les impacts de changements de comportement, mais également d'étudier et de se préparer à des comportements qui pourraient être différents notamment dans le cadre des évolutions de produits d'assurance vie (euro croissance, euro bonifié,...) qui pourraient ne pas avoir le même fonctionnement en termes de comportement.

La loi de rachats dynamiques que nous avons retenue a été établie à partir de l'évolution historique du TEC10 qui se caractérise par une tendance durable à la baisse des taux, bien que l'on puisse ponctuellement noter quelques brèves variations à la hausse d'amplitudes plus ou moins fortes. Nous ne disposons donc pas à ce jour d'un historique de tendance haussière suffisamment profond pour être confiants par rapport à l'efficience notre loi lors d'une potentielle remontée pérenne des taux.

En premier lieu, nous pouvons nous interroger sur l'impact du contexte de taux sur le comportement des assurés. Deux grands scénarios peuvent être envisagés en matière de taux d'intérêt :

- une évolution à la baisse en continuité avec le contexte actuel ;
- un changement de tendance, autrement dit une évolution à la hausse.

Avant d'aborder ces deux cas de figure, il est utile de faire un point sur la situation actuelle. Les taux d'intérêt dont la baisse dure depuis plus d'une vingtaine d'années déjà, atteignent aujourd'hui des niveaux historiquement bas et affichent une diminution absolue d'un peu plus de 5% depuis 1995.

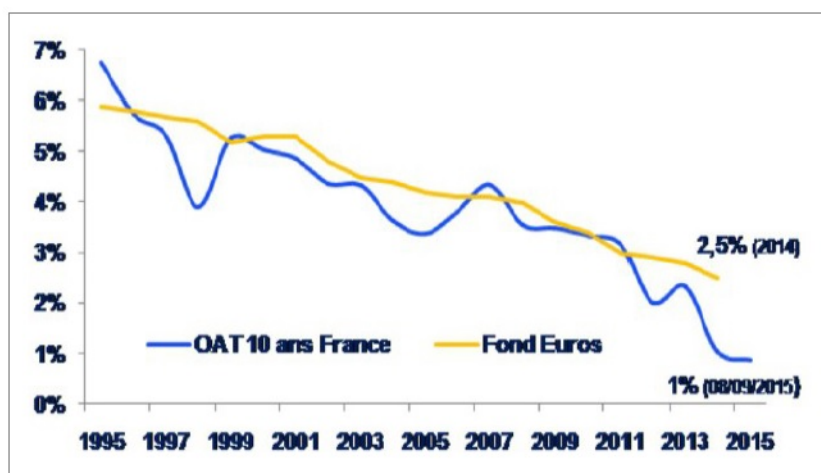


FIGURE 15.1 – Évolution des rendements des fonds euros et des rendements des OAT français à 10 ans (FFSA)

Les revenus financiers des compagnies d'assurance vie proviennent du placement majoritaire en obligations à taux fixe des primes qu'elles ont encaissées. Ces revenus constituent la source d'alimentation des rendements des supports euros qui sont conditionnés d'une part par les taux garantis aux épargnants par l'assureur et d'autre part par la Participation aux Bénéfices (voir section 1.2.1). Il en résulte donc une incompatibilité mécanique entre taux d'intérêt bas et rémunération élevée des contrats en euro.

Or l'écart s'est peu à peu creusé entre la rémunération des contrats d'assurance vie adossés au fonds euros, contrats qui en 2015 représentent près de 82% des provisions techniques des compagnies d'assurance vie, et le rendement des OAT françaises. Si bien que cet écart croissant menace la marge des compagnies d'assurance et représente un risque non négligeable pour le secteur assurantiel. En juin 2015, une étude menée par l'ACPR estime le taux de revalorisation des contrats en euros à environ 2.5% alors que le taux de rendement de l'OAT 10 ans gravite lui autour de 1%. Il paraît évident qu'une situation où les sorties sont plus importantes que les entrées ne peut durer dans le temps.

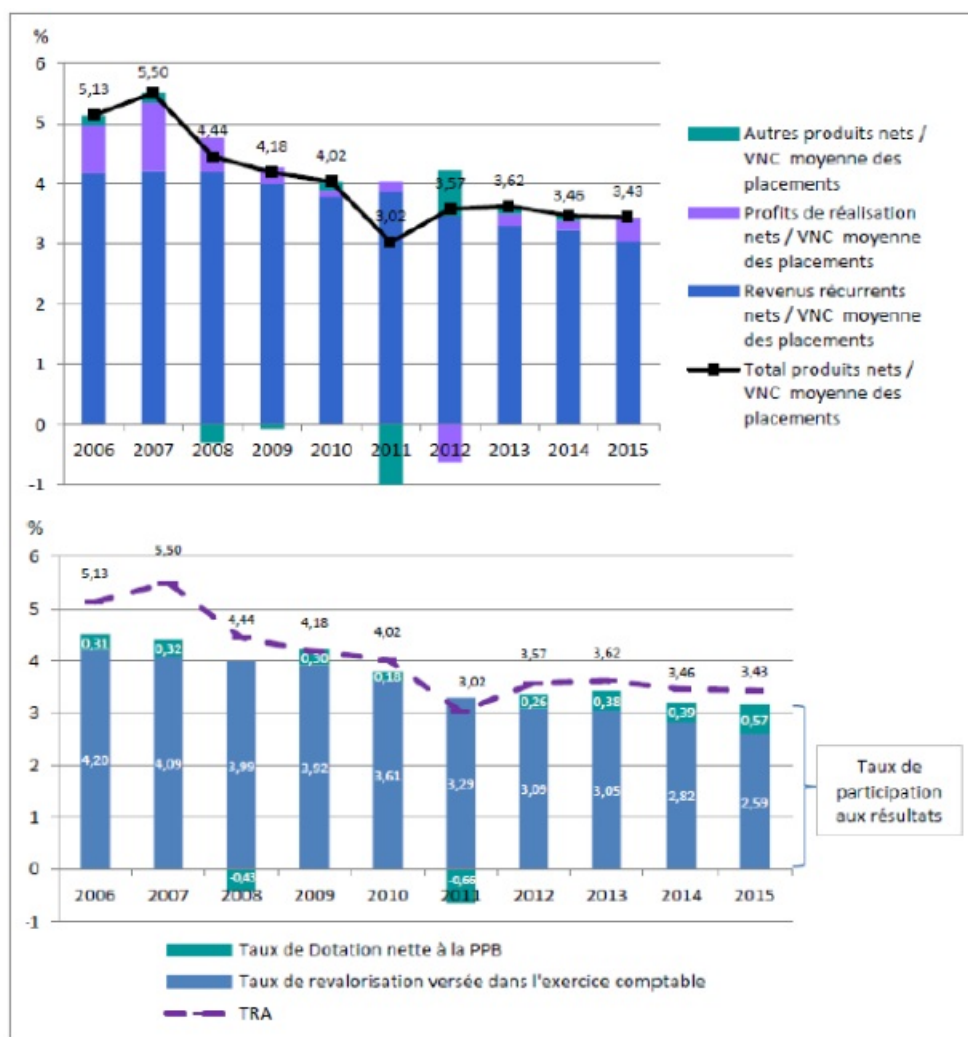


FIGURE 15.2 – Décomposition du taux de rendement de l’actif et de la participation aux résultats des 12 principaux assureurs vie et mixte (ACPR)

Toutefois, le Taux de Rendement de l’Actif (TRA) des compagnies d’assurance vie a diminué moins rapidement que les taux obligataires à long terme. En effet, les assureurs achètent et vendent des actifs à différentes périodes afin de respecter leurs engagements vis à vis de leurs assurés mais aussi pour maintenir leur niveau de solvabilité. De ce fait et par respect du principe de diversification, l’actif de leur bilan est constitué de placements de durations et de taux de rendement hétérogènes ce qui implique que leur stock d’actifs ne peut se renouveler entièrement de manière instantanée. L’effritement du TRA provient de la baisse des revenus récurrents des placements (coupons, dividendes par exemple) qui passe de 4.1% à 3% entre 2007 et 2015 mais qui reste cependant moins intense que celle des taux obligataires de long terme du fait de l’inertie inhérente au stock d’actifs des assureurs.

Par ailleurs, on note également sur la période d’étude une forte baisse du TME et une diminution dans de moindres proportions du taux de PB. La Provision pour Participation aux Bénéfices connaît quant à elle une évolution plus volatile du fait de sa nature et de ses règles de gestion.

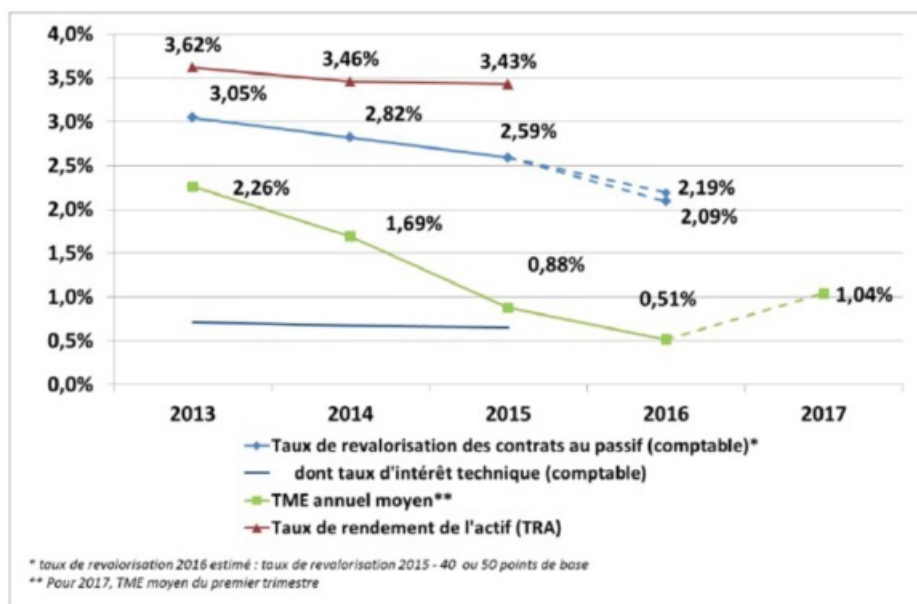


FIGURE 15.3 – Taux de revalorisation, TRA et TME des 12 principaux assureurs vie et mixte depuis 2013 (ACPR)

Les réserves actuelles de richesses non encore allouées aux contrats d'assurance, autrement dit la PPB, la Réserve de Capitalisation (RC) et les Plus-Values Latentes (PVL), augmentent fortement depuis 2012. Toutefois les assureurs ne jouissent pas d'une totale liberté en ce qui concerne l'utilisation de ces fonds. Par exemple, la réalisation des PVL obligataires alimentent la RC et peuvent notamment servir à compenser en partie d'éventuelles Moins-Values Latentes (MVL) de type obligataire.

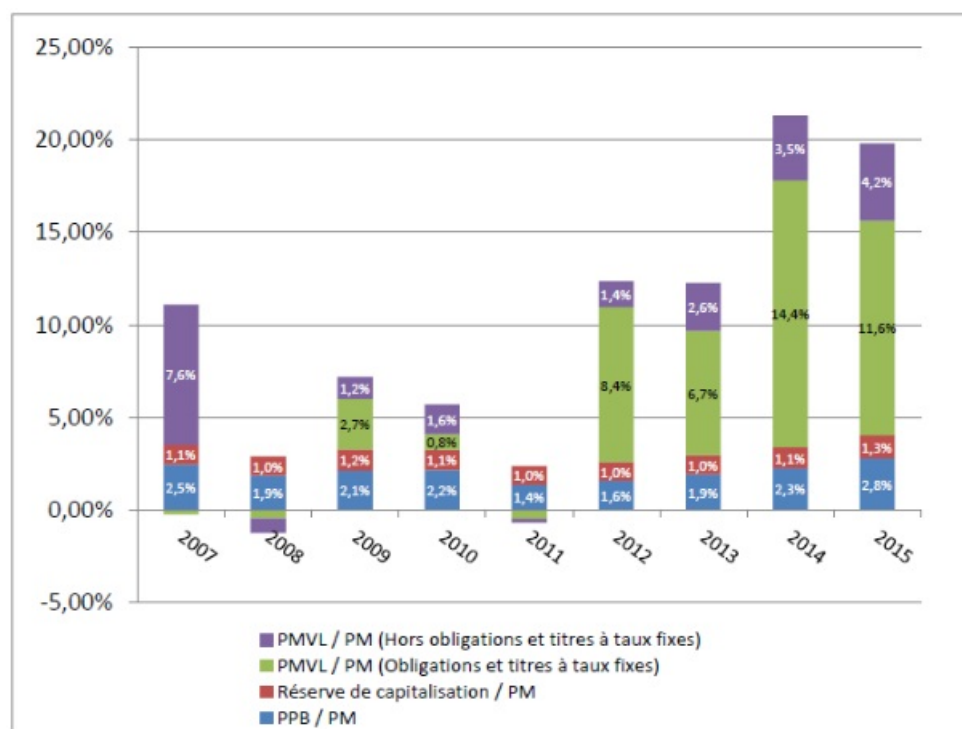


FIGURE 15.4 – Niveau de richesse depuis 2007 des 12 principaux assureurs vie et mixte (ACPR)

Nous pouvons nous demander ce qu'il se passerait si les taux continuaient à baisser.

Cas 1 : persistance de la baisse des taux d'intérêt

La tendance baissière des taux de rendement des obligations souveraines a un impact direct sur le rendement de l'actif des compagnies d'assurance. Par construction, il existe une relation décroissante entre le taux de rendement d'une obligation et son prix.

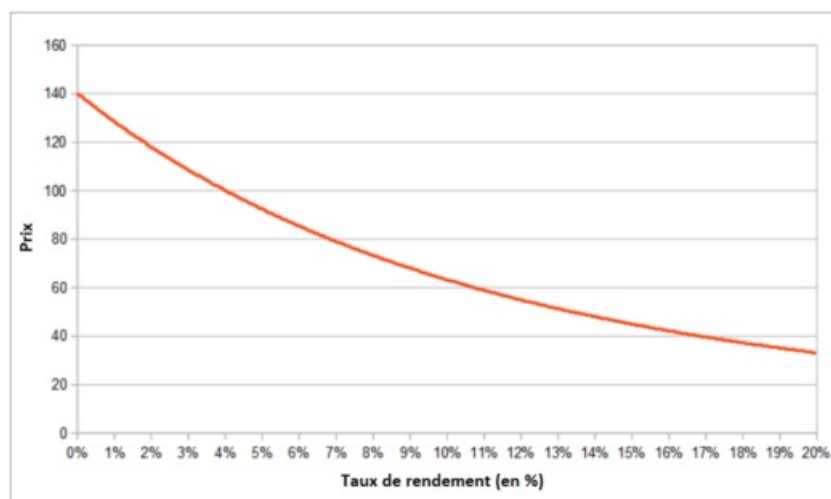


FIGURE 15.5 – Évolution du prix d'une obligation à taux fixe de maturité 10 ans en fonction du taux de rendement

Ainsi le réinvestissement des produits de la vente des actifs arrivés à maturité et des liquidités issues d'une collecte positive nette impacte le rendement de l'actif des compagnies d'assurance. En outre, si l'écart entre le rendement des actifs et le taux servi aux assurés diminue, cela dégrade à la fois la rentabilité et la solvabilité des assureurs. Ce phénomène peut également entamer la confiance des assurés en plus de leur intérêt pour les contrats d'assurance vie et par conséquent provoquer une vague de rachat.

Depuis 2015, la banque de France et l'ACPR ont lancé plusieurs appels afin que les assureurs abaissent la rémunération du fonds euros pour que ces derniers soient plus en accord avec le rendement actuel des OAT.

La baisse continue des taux fait planer une inquiétude majeure sur le marché européen : la réalisation d'un scénario type japonais qui s'est soldé par la faillite de 8 compagnies d'assurance.

La crise qui a touché le secteur assurantiel japonais à la fin des années 1990 a principalement été provoquée par la déconnexion pérenne des taux garantis servis de la réalité économique et financière mais aussi par une politique commerciale agressive en termes de collecte. Elle se caractérise notamment par la réalisation simultanée de trois risques interconnectés :

- i. un risque de déséquilibre de la durée de l'actif et du passif des assureurs ;
- ii. un risque de rachat massif ;
- iii. un risque de propagation à l'ensemble du système.

(i) La durée moyenne du passif des compagnies d'assurance est supérieure à celle de leur actif. D'un côté leur passif comprend d'anciens contrats auxquels sont associés des garanties fixées à leur date de souscription. La contraction de ses polices pousse l'assureur à investir dans des placements de long terme peu risqués comme par exemple des obligations souveraines. D'un autre côté l'assureur doit détenir à l'actif des titres peu risqués de court terme et très liquides (exemple : obligations de maturités inférieures à 1 an) qui lui permettront de faire face à des rachats de contrats potentiels. Il existe donc un clivage entre la durée moyenne des polices d'assurance et celle de l'actif. Or cet écart peut porter préjudice aux organismes d'assurance s'il est trop important dans un contexte où les taux bas perdurent. Dans ce type d'environnement, les titres détenus par l'assureur qui arrivent à échéance sont réinvestis dans des obligations plus coûteuses et à rendements plus faibles, on parle de risque de réinvestissement. La marge de l'assureur se réduit alors car les titres nouvellement acquis ont un rendement plus faible alors que les taux garantis restent eux au même niveau. Cela entraîne la réalisation de MVL mais également un déséquilibre temporaire de la valeur de l'actif et du passif menaçant ainsi la solvabilité de l'assureur.

(ii) Si les assurés estiment que l'assureur n'est pas en mesure de maintenir un rendement suffisamment élevé sur leurs contrats en euro, ils pourraient être amenés à racheter en masse leurs contrats. Dans le cas d'une décollecte nette importante, les assureurs n'ont d'autres choix que de se défaire de leurs actifs les plus liquides et/ou de vendre à perte des obligations qui n'ont pas encore atteints leur maturité. Dès lors, les assureurs sont plus exposés au risque de faillite mais également à un risque systémique. Si une compagnie réalise une vente importante de titres liquides cela peut affecter les autres compagnies en entraînant la dégradation de la qualité des actifs qu'elles détiennent.

(iii) L'assurance vie étant un des moteurs principaux de l'économie, ce contexte exposerait de manière générale le secteur financier à un risque de faillite et entraîner des réactions en chaîne.

Les compagnies d'assurance peuvent envisager plusieurs stratégies plus ou moins efficaces pour contrer la réalisation d'un tel scénario :

- Puiser dans les richesses encore positives non affectées aux polices (PPB, RC, PVL) dans la mesure du possible. Ces réserves étant limitées, cette stratégie ne peut en aucun cas être une solution sur le long terme.
- Diversifier leurs placements dans le respect de la réglementation notamment en investissant dans des titres plus risqués et plus rentables (obligations à taux variable). Toutefois, cela impliquerait en parallèle une augmentation importante des fonds propres à détenir.

- Procéder à une décollecte modérée. Cependant cela pourrait desservir l'image des compagnies et inciter les assurés à racheter leurs contrats.
- Mettre en place des campagnes d'avenant afin de faire baisser les taux garantis. Notons que si le processus n'est pas suffisamment transparent, les assurés pourront se sentir lésés et cela pourrait générer un sentiment de mécontentement général qui exposerait les assureurs à un risque de rachat de masse.
- Favoriser l'investissement et/ou la transition vers les contrats UC ce qui reporterait le risque sur les assurés.

De manière plus générale, la directive Solvabilité 2 a été élaborée en prenant en compte ce scénario. Ces situations sont captées à travers le Best Estimate des provisions, le calcul du SCR (chocs à la hausse, à la baisse et de masse des rachats et chocs de taux) et une modélisation précise des rachats structurels et dynamiques. La mise en place d'outils prudentiels de surveillance et de pilotage des taux garantis pourrait cependant être un plus dans la prévention d'un scénario à la japonaise. En outre, l'application de *l'article 49 de la loi du 9 décembre 2016 relative à la transparence, à la lutte contre la corruption et à la modernisation de la vie économique* dite « loi Sapin II » donne au Haut Comité de Stabilité Financière (HCSF) la possibilité de moduler dans une certaine mesure la PPB et de prendre des mesures conservatrices limitées dans le temps afin de faire face à une crise systémique majeure et en particulier « limiter temporairement, pour tout ou partie du portefeuille, le paiement des valeurs de rachat ».

Cas 2 : une remontée des taux d'intérêt

Comme nous l'avons vu plus haut le prix des obligations monte lorsque le taux d'intérêt diminue et il descend quand les taux d'intérêt augmentent. Si une remontée des taux signifie une augmentation de la rentabilité des obligations disponibles sur le marché, en quoi cette situation pourrait-elle menacer les organismes d'assurance ?

Dans le cas d'une remontée des taux les obligations déjà présentes dans le portefeuille d'actifs de l'assureur, pour certaines acquises durant la période de chute des taux d'intérêt, deviennent moins rentables que celles disponibles sur le marché et perdent de leur valeur. Le même problème se pose ici, si la rémunération des contrats d'assurance vie n'est pas suffisamment attractive, autrement dit élevée, les assurés risquent de se désintéresser et d'exercer leur option de rachat au profit d'investissement plus avantageux offerts sur le marché. Or pour pouvoir servir des taux de rendement élevés sur le long terme il faut que les taux obligataires soient eux aussi élevés.

Deux grands scénarios de hausse des taux peuvent être envisagés :

- une remontée lente et progressive des taux d'intérêt ;
- une remontée brutale, de forte amplitude et durable.

Si le premier scénario est souhaitable, le second a de quoi inquiéter. Dans le cas d'une remontée progressive des taux d'intérêt, les compagnies d'assurance seraient en mesure de reconstituer graduellement leur portefeuille d'actifs notamment à travers l'achat de titres plus rentables disponibles sur le marché. Au vu des niveaux actuels de leurs stocks de richesses non allouées, les assureurs semblent avoir la capacité de surmonter la phase de transition des taux. De plus, dans ce cas précis, ils seront plus à même de piloter l'écart de rendement entre les contrats d'assurance vie et la concurrence qui reste limité. Ajoutons à cela que la probabilité que de nouvelles opportunités d'investissement apparaissent sur le marché reste faible sans oublier que l'ancienneté et la fiscalité peuvent freiner le départ des assurés. En ce sens, le risque de rachat de masse resterait minime en cas de hausse progressive des taux.

Le second scénario est quant à lui moins rassurant et pourrait avoir un effet dévastateur. Une forte hausse des taux engendrerait l'apparition potentielle d'opportunités d'investissement très attractives sur le marché notamment en termes de rémunération. De plus, l'inertie inhérente aux portefeuilles de passifs et d'actifs des assureurs viendrait alors envenimer la situation si en plus de cela la hausse est soudaine. Les compagnies d'assurances seraient alors incapables de s'ajuster aux conditions de marché ce qui pourrait leur être fatal. En outre la durabilité de la hausse des taux a aussi son rôle à jouer. Si en plus de cela la hausse est durable, les assurés auront suffisamment de recul pour prendre leurs décisions et un scénario de rachat de masse ne serait plus une chimère. Cette situation causerait alors de grosses pertes pour les assureurs (réalisation massive de MVL, dégradation de la marge, des fonds propres et du TRA) et serait susceptible de les conduire à la faillite.

Des solutions similaires au cas précédent peuvent être envisagées afin de se prémunir contre les risques sous-jacents à la hausse des taux. En plus des freins psychologiques liés à la fiscalité des contrats d'assurance vie qui permettent dans une certaine mesure de retenir les assurés, nous pouvons entrevoir d'autres solutions comme le développement de nouveaux produits ou encore le raccourcissement de la durée des actifs de type obligataire.

Le comportement des assurés suivant ces scénarios reste hypothétique mais probable. Les crises financières et immobilières de 1994 et de 2008-2009 durant lesquelles les acteurs économiques ont dû faire face à une remontée des taux, ont montré qu'en période d'incertitude les assurés avaient tendance à garder leur épargne voire même l'alimenter et non pas racheter leur contrat. Cela montre bien que le comportement des assurés est un paramètre difficilement appréhendable et peut être contre-intuitif.

Nous avons vu que le contexte de taux avait un rôle important dans les décisions de rachat des assurés. Il paraît donc essentiel d'étudier en parallèle le comportement du portefeuille d'actifs de l'assureur lorsque que l'on souhaite modéliser le comportement de rachat des assurés, l'enjeu étant de maîtriser ce dernier en prenant en compte d'éventuelles interactions avec l'évolution des taux d'intérêt.

Conclusion

La modélisation des rachats dynamiques représente un enjeu majeur pour les compagnies d'assurance. En effet, une mauvaise appréhension du risque de rachat peut avoir de lourdes conséquences sur le pilotage de l'activité mais aussi sur l'image de ces dernières. Bien qu'aujourd'hui encore l'assurance vie soit toujours populaire, les récentes crises économiques, la baisse des taux d'intérêt ainsi que les fluctuations de la fiscalité fragilisent grandement la fidélité des assurés. Ainsi, depuis quelques années l'incertitude entourant le risque de rachat se fait de plus en plus ressentir. Face à ces différentes menaces, il est primordial pour les assureurs de construire une loi de rachats dynamiques pertinente qui soit en accord avec les spécificités de leurs portefeuilles.

Ce mémoire a pour objectif de mieux comprendre et appréhender le phénomène de rachats dynamiques. L'étude approfondie des textes réglementaires et du fonctionnement des contrats d'assurance vie nous a permis dans un premier temps de cerner le contexte juridique et économique qui entoure les rachats mais aussi les risques qui y sont liés.

La deuxième partie de ce mémoire fournit une analyse globale de l'historique de rachats qui est à notre disposition. Nous établissons grâce à la Théorie des Valeurs Extrêmes un lien entre les hauts niveaux de rachats et les crises économiques. Ce lien justifie la présence d'indicateurs financiers dans notre panel de variables explicatives. Par ailleurs, les résultats de l'ANOVA et de l'autocorrélogramme mettent en relief l'existence d'une périodicité dans nos données. Cela va dans le sens de l'hypothèse de dualité déterministe et aléatoire des rachats. Par la suite nous parvenons à séparer ces deux composantes grâce au lissage exponentiel de Holt-Winters. Ainsi, nous assimilons les valeurs lissées aux rachats structurels et le bruit aux rachats dynamiques.

Nous consacrons la dernière partie de ce mémoire à la recherche de variables explicatives pertinentes et à la modélisation des rachats dynamiques. L'étude de corrélation fait ressortir dans un premier temps la variance de l'EUROSTOXX 50 comme variable explicative. Cette dernière paraît cohérente mais uniquement sur les premières années de l'historique de rachats. La segmentation de la période d'étude nous permet alors d'expliquer les taux de rachats dynamiques à partir l'évolution du TEC 10. La recherche de variables explicatives met en exergue l'instabilité du comportement des assurés qui semble être lié aux fluctuations des marchés financiers et obligataires. Nous retenons le modèle de régression polynomiale avec comme variable explicative le TEC 10 afin d'expliquer les rachats dynamiques observés. Nous concluons alors par des calculs d'impacts financiers qui montrent que notre loi de rachat est plus prudente que la loi actuellement utilisée dans l'entreprise.

La problématique des rachats constitue un sujet vaste et peut être abordée de multiples manières. Dans la mesure où le comportement des assurés reste à ce jour imprévisible, les compagnies d'assurance ont tout intérêt à construire et revoir régulièrement leurs lois de rachats dynamiques cela afin de pouvoir fournir la meilleur estimation de leur passif et de mieux maîtriser le risque de rachat.

Bibliographie

- [1] *Code des assurances*. 01 janvier 2017, 849 pages.
- [2] *Mémoire : Modélisation du rachat et parallèle avec la Physique*. Adrien Suru, 2012, 218 pages.
- [3] *Orientations Nationales Complémentaires aux Spécifications Techniques pour l'exercice 2013 de préparation à Solvabilité 2*. ACPR, 2013, 32 pages.
- [4] *Préparation à Solvabilité 2 : Enseignements des annexes techniques vie remises en 2013*. ACPR, 18 mars 2014, pages 5-6.
- [5] *Mémoire : Les rachats dynamiques : Comportement des assurés en période de crise, nouvelle modélisation et impact financier pour l'assureur*. Xavier Brugirard, 2012, 123 pages.
- [6] *Analyses et synthèses : Étude sur les taux de revalorisation des contrats individuels d'assurance vie au titre de 2013*. ACPR, mai 2014, 19 pages.
- [7] *Analyses et synthèses : Le taux technique en assurance vie (Code des Assurances) - n°66*, ACPR, juin 2016, 19 pages.
- [8] *Excess functions and estimation of the extreme value index*. J Beirlant, P Vynckier, and J.M Teugels, 1996, Bernoulli 2, pages 293-318.
- [9] *Probabilités, Analyse des données et Statistique*. G. Saporta, 1990, pages 351-358.
- [10] *Flash Actu' n°52 : Loi Sapin 2 : la quasi-totalité des dispositions d'assurance validée par le conseil constitutionnel*. Forsides, 19 décembre 2016, 1 pages.
- [11] *Les crises financières*. Robert Boyer, Mario Dehove et Dominique Plihon, 2004, 414 pages.
- [12] *Éléments de traitement du signal*. G. Baudoin et J.-F. Bercher, École Supérieure d'Ingénieurs en Électrotechnique et Électronique, Septembre 1998, 128 pages.
- [13] *Support de cours ISUP : Série temporelles : décomposition saisonnière, lissage exponentiel, modélisation SARIMA*. Vincent Lefieux, 2015-2016.
- [14] *QIS5 Technical Specifications*. EIOPA, 5 July 2010, 330 pages.
- [15] *Modèles de prévision séries temporelles*. Arthur Charpentier 15 mai 2012, 196 pages.
- [16] *Exponential smoothing : The state of the art - Part II*. Everette S. Gardner, Jr., 2005, 81 pages.
- [17] *Fourier Analyses of Time Series, An Introduction*. P. Bloomfield, 2000, JOHN WILEY & Sons, INC.

- [18] *Option valuation using the fast Fourier transform*. Peter Carr and Dilip B. Madan, 1999, 13 pages.
- [19] *Support de cours ISUP : Théorie des Valeurs Extrêmes*. Marie Kratz, 2016.
- [20] *Modelling extremal events : for insurance and Finance*. Embrechts, P., Klüppelberg, C. and Mikosch, T. 2011, Springer, 33 pages.
- [21] *Main determinants of lapse in the German life insurance industry*. Kiesenbauer D., 2011, 35 pages.
- [22] *Économétrie linéaire*. Bruno Crépon, 2005.
- [23] *Tests de normalité, techniques empiriques et tests statistiques*. Ricco Rakotomalala, 2011.
- [24] *Les comportements de rachats en assurance vie en régime de croisière et en période de crise*. Xavier Milhaud, 2010.
- [25] *Mémoire : Couverture du risque de hausse des taux en assurance vie*. Sabrina Nissan, 2016.
- [26] *Analyses et synthèses : Assurance vie en France et environnement de taux bas - n°78*, ACPR, mai 2017, 18 pages.
- [27] *Analyses et synthèses : Défaillances dans le secteur de l'assurance vie au Japon dans les décennies 1990 et 2000 - n°30*, ACPR, mai 2014, 27 pages.

Table des figures

1.1	Schéma synthétique : assurance vie en cas de vie	13
1.2	Schéma synthétique : assurance vie en cas de décès	14
1.3	Répartition des encours de provisions mathématiques selon le TMG en 2013	18
1.4	Principe de fonctionnement d'une compagnie d'assurance	19
1.5	Récapitulatif de l'imposition sur les intérêts	27
2.1	Bilan sous Solvabilité 2	30
2.2	Représentation de la loi QIS	34
2.3	Paramètres des lois QIS_{Max} et QIS_{Min}	34
2.4	Impacts BEL de l'exercice de préparation ACPR 2013	34
4.1	Valeur des rachats dynamiques	39
6.1	Rachats observés sur le portefeuille Épargne	43
6.2	Rachats observés par ancienneté	45
7.1	Boîtes à moustaches des taux de rachat sur la période 2007-2015	47
7.2	Mean Excess Plot : détermination du seuil	50
7.3	Repérage des hauts niveaux de taux de rachat avec le MEP	51
8.1	Rachats observés sur le portefeuille Épargne	53
8.2	Première ANOVA : facteur année de rachat	55
8.3	Deuxième ANOVA : facteur mois de rachat	55
8.4	Résultats des deux ANOVA successives	56
8.5	Décomposition tendancielle et saisonnière des taux de rachat	57
8.6	Autocorrélogramme simple des taux de rachat	58
8.7	Autocorrélogramme simple des taux de rachat avec double différentiation	59
9.1	Spectrogramme du test FFT	63
9.2	Spectrogramme des taux de rachat	64
9.3	Représentation des trois premières composantes	64
9.4	Reconstitution du signal à partir des trois premières composantes	64
9.5	Application du lissage de Holt-Winters aux rachats globaux	67
9.6	Taux de rachats dynamiques sur la période 2007-2015	68
10.1	Choix des variables explicatives selon la corrélation	72
10.2	Graphiques de corrélation avec la volatilité de l'EUROSTOXX 50	74

10.3	Corrélation avec la variance de l'EUROSTOXX 50	75
10.4	Graphiques de corrélation avec la variance de l'EUROSTOXX 50	75
10.5	Taux de rachats dynamiques en fonction de la variance de l'EUROSTOXX 50	76
10.6	Corrélation de la variance de l'EUROSTOXX 50 sur historique segmenté	76
10.7	Corrélation du TEC 10 sur historique segmenté	77
10.8	Taux de rachats dynamiques en fonction du TEC 10	77
10.9	Elasticités calculées sur la période de 2008 à 2015	78
10.10	Elasticités calculées sur la période segmentée	79
11.1	Ajustement du modèle de régression linéaire simple aux taux de rachats dynamiques	84
11.2	Estimation des paramètres du modèle de régression linéaire simple	85
11.3	Test d'adéquation du modèle de régression linéaire simple	85
12.1	Évaluation du critère de Mallows	89
12.2	Ajustement du modèle de régression polynomiale aux taux de rachats dynamiques . .	90
12.3	Estimation des paramètres du modèle de régression polynomiale	90
13.1	Résidus du modèle de régression linéaire	91
13.2	Résidus du modèle de régression polynomiale	92
13.4	QQ-plot du modèle de régression linéaire	94
13.5	QQ-plot du modèle de régression polynomiale	95
13.6	Application : test de Shapiro-Wilk	96
13.7	Application : calcul des coefficients de détermination	98
13.8	Application : calcul des critères AIC	99
14.1	Schéma synthétique : fonctionnement de Prophet suivant une approche de type flexing	100
14.2	Bilan MCEV sous Solvabilité 2	101
14.3	Exemple de trajectoires des 1000 scénarios économiques	103
14.4	Calcul de la Time Value of Options and Guarantees	103
14.5	Calcul des BEL des lois de rachats dynamiques	105
14.6	Calcul d'impacts financiers de la nouvelle loi de rachats dynamiques	105
14.7	Impacts financiers de la sensibilité sur la loi TEC 10	106
14.8	Comparaison des profits de la loi actuelle et de la sensibilité	106
15.1	Évolution des rendements du fonds euros et des rendements des OAT français à 10 ans (FFSA)	109
15.2	Décomposition du taux de rendement de l'actif et de la participation aux résultats des 12 principaux assureurs vie et mixte (ACPR)	110
15.3	Taux de revalorisation, TRA et TME des 12 principaux assureurs vie et mixte depuis 2013 (ACPR)	111
15.4	Niveau de richesse depuis 2007 des 12 principaux assureurs vie et mixte (ACPR) . .	111

15.5 Évolution du prix d'une obligation à taux fixe de maturité 10 ans en fonction du taux de rendement 112